Redes de Sensores

Filtrado no lineal

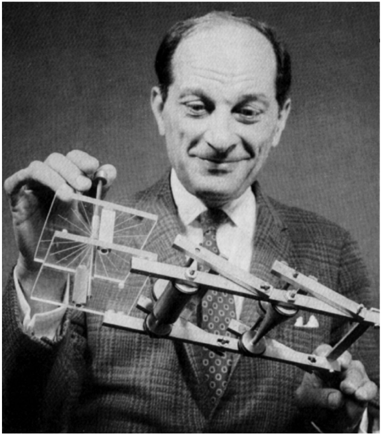
Manuel A. Vázquez
Joaquín Míguez
Jose Miguel Leiva

4 de febrero de 2024

Índice

Índice

Linealidad



"Utilizar un término como ciencia no lineal es como referirse al grueso de la zoología como el estudio de los animales que no son elefantes."

— Stanislaw Ulam

Índice

Modelo dinámico no lineal

Consideramos la misma ecuación de estado que antes

- $$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t,$$

Modelo dinámico no lineal

Consideramos la misma ecuación de estado que antes

- $$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t,$$

...pero ahora la relación entre el estado y las observaciones viene dada por la función (vectorial) $\mathbf{h} : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ (más ruido gaussiano aditivo)

- $$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_t,$$

siendo $\mathbf{h}$ un vector de funciones escalares de variable vectorial,

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_t) = \begin{bmatrix} \mathrm{h}_1(\mathbf{x}_t) \\ \mathrm{h}_2(\mathbf{x}_t) \\ \vdots \\ \mathrm{h}_N(\mathbf{x}_t) \end{bmatrix}$$

Modelo dinámico no lineal

Consideramos la misma ecuación de estado que antes

- $$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t,$$

...pero ahora la relación entre el estado y las observaciones viene dada por la función (vectorial) $\mathbf{h} : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$ (más ruido gaussiano aditivo)

- $$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_t,$$

siendo **h** un vector de funciones escalares de variable vectorial,

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_t) = \begin{bmatrix} \mathrm{h}_1(\mathbf{x}_t) \\ \mathrm{h}_2(\mathbf{x}_t) \\ \vdots \\ \mathrm{h}_N(\mathbf{x}_t) \end{bmatrix}$$

No podemos aplicar el filtro de Kalman!!

Modelo dinámico linealizado

Objetivo

Aplicar el KF sobre el modelo no lineal para estimar $\mathbf{x}_t$ dado $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_t$

Podemos construir una aproximación lineal de la ecuación de observación[1] utilizando una serie de Taylor de primer orden

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_t) \approx \mathbf{h}(\mathbf{x}^0) + \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_t}\right]_{\mathbf{x}_t = \mathbf{x}^0} (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}^0),$$

siendo

$$\left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_t}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{h}_1}{\partial x_{1,t}} & \frac{\partial \mathrm{h}_1}{\partial x_{2,t}} & \cdots & \frac{\partial \mathrm{h}_1}{\partial x_{M,t}} \\ \frac{\partial \mathrm{h}_2}{\partial x_{1,t}} & \frac{\partial \mathrm{h}_2}{\partial x_{2,t}} & \cdots & \frac{\partial \mathrm{h}_2}{\partial x_{M,t}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathrm{h}_N}{\partial x_{1,t}} & \frac{\partial \mathrm{h}_N}{\partial x_{2,t}} & \cdots & \frac{\partial \mathrm{h}_N}{\partial x_{M,t}} \end{bmatrix}$$

es el Jacobiano (de derivadas parciales) de $\mathbf{h}$.

[1] Podríamos hacer lo mismo con una ecuación de estado no lineal!!

Derivando el filtro de Kalman extendido

EKF define unas observaciones transformadas,

$$\tilde{\mathbf{y}}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{h}\left(\mathbf{x}^0\right) + \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_t}\right]_{\mathbf{x}_t = \mathbf{x}^0} \mathbf{x}^0,$$

que dan lugar a un modelo dinámico aproximado que es lineal y gaussiano

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t \\ \tilde{\mathbf{y}}_t &= \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_t}\right]_{\mathbf{x}_t = \mathbf{x}^0} \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t \end{aligned}$$

Conseguido!!

Es inmediato aplicar el KF sobre el modelo anterior.

Filtro de Kalman extendido

- Predicción

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} \\
\mathbf{P}_{t|t-1} &= \mathbf{Q} + \mathbf{F}\mathbf{P}_{t-1|t-1}\mathbf{F}^\top
\end{aligned}
$$

Filtro de Kalman extendido

- Predicción

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} \\ \mathbf{P}_{t|t-1} &= \mathbf{Q} + \mathbf{F}\mathbf{P}_{t-1|t-1}\mathbf{F}^\top \end{aligned}$$

- Actualización

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t &= \mathbf{P}_{t|t-1}\left[\frac{\partial\,\mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_t}\right]^\top_{\mathbf{x}_t=\mathbf{x}^0}\left(\left[\frac{\partial\,\mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_t}\right]_{\mathbf{x}_t=\mathbf{x}^0}\mathbf{P}_{t|t-1}\left[\frac{\partial\,\mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_t}\right]^\top_{\mathbf{x}_t=\mathbf{x}^0} + \mathbf{R}\right)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t|t} &= \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t(\mathbf{y}_t - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})) \\ \mathbf{P}_{t|t} &= \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{K}_t\left(\left[\frac{\partial\,\mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_t}\right]_{\mathbf{x}_t=\mathbf{x}^0}\mathbf{P}_{t|t-1}\left[\frac{\partial\,\mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_t}\right]^\top_{\mathbf{x}_t=\mathbf{x}^0}\right)\mathbf{K}_n^\top, \end{aligned}$$

siendo $\mathbf{Q}$ la covarianza de $\mathbf{v}_t$ y $\mathbf{R}$ la de $\mathbf{w}_t$.

Filtro de Kalman extendido

- Predicción

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} \\
\mathbf{P}_{t|t-1} &= \mathbf{Q} + \mathbf{F}\mathbf{P}_{t-1|t-1}\mathbf{F}^\top
\end{aligned}
$$

- Actualización

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_t &= \mathbf{P}_{t|t-1}\left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_t}\right]^\top_{\mathbf{x}_t=\mathbf{x}^0}\left(\left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_t}\right]_{\mathbf{x}_t=\mathbf{x}^0}\mathbf{P}_{t|t-1}\left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_t}\right]^\top_{\mathbf{x}_t=\mathbf{x}^0}+\mathbf{R}\right)^{-1} \\
\hat{\mathbf{x}}_{t|t} &= \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t(\mathbf{y}_t - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})) \\
\mathbf{P}_{t|t} &= \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{K}_t\left(\left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_t}\right]_{\mathbf{x}_t=\mathbf{x}^0}\mathbf{P}_{t|t-1}\left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_t}\right]^\top_{\mathbf{x}_t=\mathbf{x}^0}\right)\mathbf{K}_n^\top,
\end{aligned}
$$

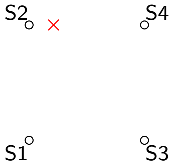
  siendo $\mathbf{Q}$ la covarianza de $\mathbf{v}_t$ y $\mathbf{R}$ la de $\mathbf{w}_t$.

- El punto de linealización $\mathbf{x}^0$ tiene que ser suficientemente cercano a $\mathbf{x}_t$ para que el algoritmo funcione correctamente. Normalmente es suficiente tomar $\mathbf{x}^0 = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$.

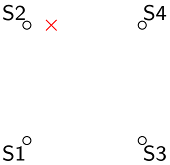
Ejemplo de función no lineal en seguimiento

Objetivo

Localización y seguimiento de un objeto con velocidad constante y conocida **c**.



Ejemplo de función no lineal en seguimiento



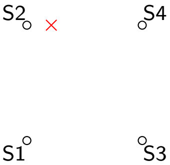
Objetivo

Localización y seguimiento de un objeto con velocidad constante y conocida $\mathbf{c}$.

La misma ecuación de estado que antes,

- $$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{c}T + \mathbf{v}_t,$$

Ejemplo de función no lineal en seguimiento



Objetivo

Localización y seguimiento de un objeto con velocidad constante y conocida $\mathbf{c}$.

La misma ecuación de estado que antes,

- $$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{c}T + \mathbf{v}_t,$$

...una ecuación de observación más *realista* basada en Received Signal Strength Indicator (RSSI),

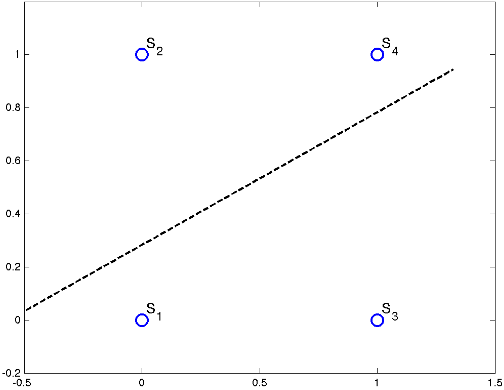
- $$y_{t,i} = \underbrace{k_1 - k_2 \log \|\mathbf{x}_t - \mathbf{s}_i\|}_{\mathrm{RSSI}_i} + w_{t,i}, \quad i = 1, \cdots, N$$

  con k_1 y k_2 constantes conocidas y $\mathbf{s}_i$ la posición del sensor correspondiente.

$$\left(\text{antes, } \mathbf{y}_t = \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t \right)$$

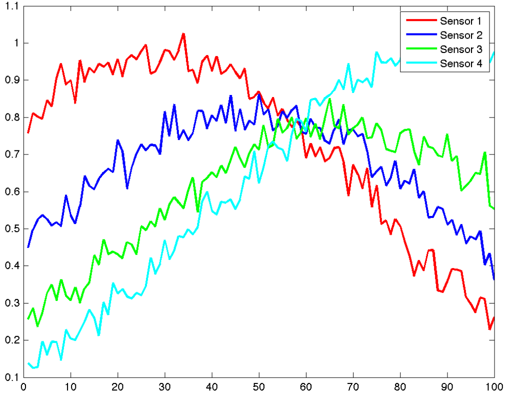
Ejemplo

- Trayectoria real



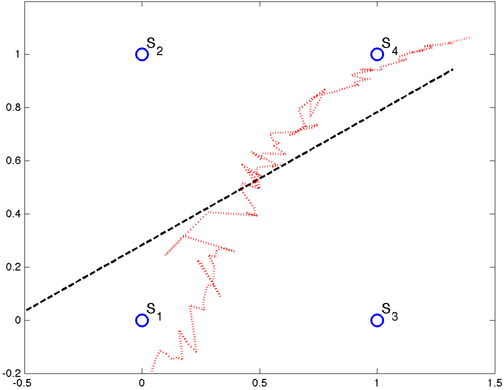
Ejemplo

- Lectura de los sensores



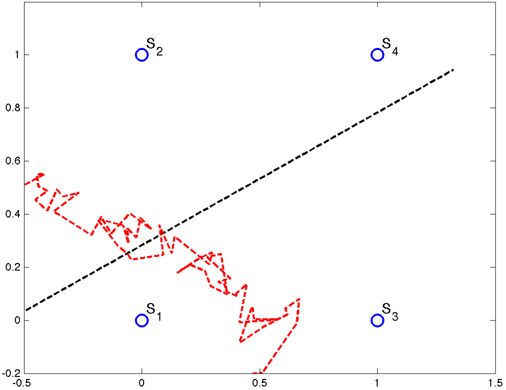
Ejemplo

- Resultado de filtrado usando solo el Sensor 2



Ejemplo

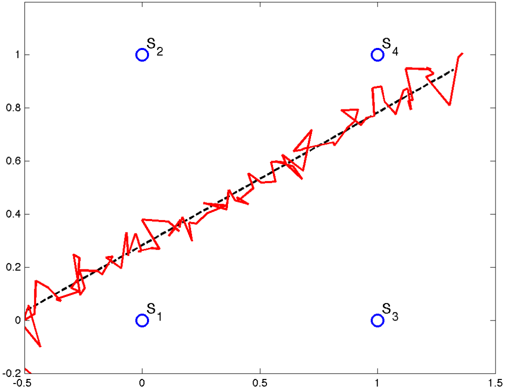
- Resultado de filtrado usando los sensores 1 y 2.



- En este caso los sensores no han podido resolver la ambigüedad de la dirección.

Ejemplo

- Resultado de filtrado usando los cuatro sensores.



Índice

Filtro de Kalman *unscented*

- Otra extensión no lineal del filtro de Kalman (alternativa al EKF)...

Filtro de Kalman *unscented*

- Otra extensión no lineal del filtro de Kalman (alternativa al EKF)...
- El modelo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t\right), & \mathbf{v}_t &\sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_n\right) \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, & \mathbf{w}_t &\sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \mathbf{R}_n\right) \end{aligned}$$

  La ecuación de observación es lineal...pero la de estado **no** lo es ($\mathbf{f}$ es una función vectorial arbitraria)

Filtro de Kalman *unscented*

- Otra extensión no lineal del filtro de Kalman (alternativa al EKF)...
- El modelo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t\right), \quad & \mathbf{v}_t \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_n\right) \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, \quad & \mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \mathbf{R}_n\right) \end{aligned}$$

  La ecuación de observación es lineal...pero la de estado **no** lo es ($\mathbf{f}$ es una función vectorial arbitraria)
- Se basa en la...

transformación *unscented*

un método para calcular los momentos de una variable aleatoria *gaussiana* tras una transformación no lineal

...que a su vez hace uso de una...

Representación con puntos *sigma*

Sea $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_t|\hat{\mathbf{x}}_t, \mathbf{P}_t\right)$.

Representación con puntos *sigma*

Sea $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_t|\hat{\mathbf{x}}_t, \mathbf{P}_t\right)$. Podemos representar esta distribución utilizando un conjunto (determinista) de **puntos sigma**

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_t(0) &= \hat{\mathbf{x}}_t, & \mathrm{W}_t(0) &= \kappa/(M+\kappa) \\
\mathbf{X}_t(i) &= \hat{\mathbf{x}}_t + \left(\sqrt{(M+\kappa)P_t}\right)_i, & \mathrm{W}_t(i) &= 1/\left(2(M+\kappa)\right) \\
\mathbf{X}_t(i+M) &= \hat{\mathbf{x}}_t - \left(\sqrt{(M+\kappa)P_t}\right)_i, & \mathrm{W}_t(i+M) &= 1/\left(2(M+\kappa)\right)
\end{aligned}$$

para $i = 1, \cdots, M$, donde $\kappa \in \mathbb{R}$ y $\left(\sqrt{(M+\kappa)P_t}\right)_i$ es la i-ésima columna de la raíz cuadrada (matricial) de $(M+\kappa)\mathbf{P}_t$.

Representación con puntos *sigma*

Sea $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_t|\hat{\mathbf{x}}_t, \mathbf{P}_t\right)$. Podemos representar esta distribución utilizando un conjunto (determinista) de **puntos sigma**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}_t(0) &= \hat{\mathbf{x}}_t, & W_t(0) &= \kappa/(M+\kappa) \\
\mathbf{X}_t(i) &= \hat{\mathbf{x}}_t + \left(\sqrt{(M+\kappa)P_t}\right)_i, & W_t(i) &= 1/\left(2(M+\kappa)\right) \\
\mathbf{X}_t(i+M) &= \hat{\mathbf{x}}_t - \left(\sqrt{(M+\kappa)P_t}\right)_i, & W_t(i+M) &= 1/\left(2(M+\kappa)\right)
\end{aligned}
$$

para $i = 1, \cdots, M$, donde $\kappa \in \mathbb{R}$ y $\left(\sqrt{(M+\kappa)P_t}\right)_i$ es la i-ésima columna de la raíz cuadrada (matricial) de $(M+\kappa)\mathbf{P}_t$.

Teorema: Puntos sigma

Este conjunto de muestras ponderadas tiene la misma media muestral y covarianza que la distribución original.

Operación del filtro de Kalman unscented

Una vez calculados los puntos sigma, el **paso de predicción** en el instante $t+1$ se puede llevar a cabo de la siguiente forma:

Operación del filtro de Kalman unscented

Una vez calculados los puntos sigma, el **paso de predicción** en el instante $t+1$ se puede llevar a cabo de la siguiente forma:

1. Propagar cada punto sigma mediante la función (no lineal) $\mathbf{f}$

$$\mathbf{X}_{t+1|t}(i) = \mathbf{f}(\mathbf{X}_t(i), 0).$$

Operación del filtro de Kalman unscented

Una vez calculados los puntos sigma, el **paso de predicción** en el instante $t+1$ se puede llevar a cabo de la siguiente forma:

1. Propagar cada punto sigma mediante la función (no lineal) $\mathbf{f}$

$$\mathbf{X}_{t+1|t}(i) = \mathbf{f}(\mathbf{X}_t(i), 0).$$

2. Calcular la media predictiva

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1}^{-} = \sum_{i=0}^{2M} \mathrm{W}_t(i)\mathbf{X}_{t+1|t}(i).$$

Operación del filtro de Kalman unscented

Una vez calculados los puntos sigma, el **paso de predicción** en el instante $t+1$ se puede llevar a cabo de la siguiente forma:

1. Propagar cada punto sigma mediante la función (no lineal) $\mathbf{f}$

$$\mathbf{X}_{t+1|t}(i) = \mathbf{f}(\mathbf{X}_t(i), 0).$$

2. Calcular la media predictiva

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1}^{-} = \sum_{i=0}^{2M} \mathrm{W}_t(i)\mathbf{X}_{t+1|t}(i).$$

3. Calcular la covarianza predictiva

$$\mathbf{P}_{t+1}^{-} = \sum_{i=0}^{2M} \mathrm{W}_t(i)\left(\mathbf{X}_{t+1|t}(i) - \hat{\mathbf{x}}_{t+1}^{-}\right)\left(\mathbf{X}_{t+1|t}(i) - \hat{\mathbf{x}}_{t+1}^{-}\right)^{\top}$$

Operación del filtro de Kalman unscented

Una vez calculados los puntos sigma, el **paso de predicción** en el instante $t+1$ se puede llevar a cabo de la siguiente forma:

1. Propagar cada punto sigma mediante la función (no lineal) $\mathbf{f}$

$$\mathbf{X}_{t+1|t}(i) = \mathbf{f}(\mathbf{X}_t(i), 0).$$

2. Calcular la media predictiva

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1}^{-} = \sum_{i=0}^{2M} \mathrm{W}_t(i)\mathbf{X}_{t+1|t}(i).$$

3. Calcular la covarianza predictiva

$$\mathbf{P}_{t+1}^{-} = \sum_{i=0}^{2M} \mathrm{W}_t(i) \left(\mathbf{X}_{t+1|t}(i) - \hat{\mathbf{x}}_{t+1}^{-}\right) \left(\mathbf{X}_{t+1|t}(i) - \hat{\mathbf{x}}_{t+1}^{-}\right)^{\top}$$

El *paso de actualización* es igual que en el FK estándar.

Notas

- El vector de medias y la matriz de covarianza calculadas propagando los puntos sigma a través de la no-linealidad siguen siendo **estimaciones**, pero son más precisas que las dadas por el EKF. Son exactas hasta el orden 2 dado por un desarrollo de Taylor. ✓

Notas

- El vector de medias y la matriz de covarianza calculadas propagando los puntos sigma a través de la no-linealidad siguen siendo **estimaciones**, pero son más precisas que las dadas por el EKF. Son exactas hasta el orden 2 dado por un desarrollo de Taylor. ✓
- Las aproximaciones todavía son gaussianas, por lo que el método no es adecuado cuando se espera que las distribuciones a posteriori sean multimodales. ✗

Notas

- El vector de medias y la matriz de covarianza calculadas propagando los puntos sigma a través de la no-linealidad siguen siendo **estimaciones**, pero son más precisas que las dadas por el EKF. Son exactas hasta el orden 2 dado por un desarrollo de Taylor. ✓
- Las aproximaciones todavía son gaussianas, por lo que el método no es adecuado cuando se espera que las distribuciones a posteriori sean multimodales. ✗
- Aunque el UKF no requiere derivadas, conlleva una linealización implícita del modelo (i.e., el UKF se puede reescribir como un método de linealización). ✓

Notas

- El vector de medias y la matriz de covarianza calculadas propagando los puntos sigma a través de la no-linealidad siguen siendo **estimaciones**, pero son más precisas que las dadas por el EKF. Son exactas hasta el orden 2 dado por un desarrollo de Taylor. ✓
- Las aproximaciones todavía son gaussianas, por lo que el método no es adecuado cuando se espera que las distribuciones a posteriori sean multimodales. ✗
- Aunque el UKF no requiere derivadas, conlleva una linealización implícita del modelo (i.e., el UKF se puede reescribir como un método de linealización). ✓
- Los puntos sigma se pueden elegir de otra manera. Por ejemplo, si se utiliza la regla de cuadratura Gauss-Hermite, se necesitan más puntos pero las aproximaciones son más precisas.

Notas

- El vector de medias y la matriz de covarianza calculadas propagando los puntos sigma a través de la no-linealidad siguen siendo **estimaciones**, pero son más precisas que las dadas por el EKF. Son exactas hasta el orden 2 dado por un desarrollo de Taylor. ✓
- Las aproximaciones todavía son gaussianas, por lo que el método no es adecuado cuando se espera que las distribuciones a posteriori sean multimodales. ✗
- Aunque el UKF no requiere derivadas, conlleva una linealización implícita del modelo (i.e., el UKF se puede reescribir como un método de linealización). ✓
- Los puntos sigma se pueden elegir de otra manera. Por ejemplo, si se utiliza la regla de cuadratura Gauss-Hermite, se necesitan más puntos pero las aproximaciones son más precisas.
- El UKF parece sencillo de implementar. Sin embargo, su rendimiento depende de diversos factores, como por ejemplo el número de puntos.

Índice

Modelos en espacio de estados

- Planetamiento formal del problema de estimación...

Modelos en espacio de estados

- Planetamiento formal del problema de estimación...
- ...desde el punto de vista bayesiano

Modelos en espacio de estados

- Planetamiento formal del problema de estimación...
- ...desde el punto de vista bayesiano
- Modelo de espacio de estados no lineal

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t) \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{w}_t) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x}_0 \sim p(\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{x}_t \sim p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}) \\ \mathbf{y}_t \sim p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t) \end{array} \right\}$$

donde

- $\mathbf{f}, \mathbf{h} \equiv$ funciones de transición y observación;
- $\mathbf{v}_t, \mathbf{w}_t \equiv$ ruido del estado y las observaciones;
- $p(\mathbf{x}_0) \equiv$ fdp *a priori* del estado;
- $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}) \equiv$ fdp de transición del estado;
- $p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t) \equiv$ fdp condicional de las observaciones (verosimilitud del estado).

Filtrado estocástico

Objetivo

Hacer seguimiento de la distribución *a posteriori*, $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$, que permite calcular la esperanza de cualquier función de interés, $\mathbf{g}$, como

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x}_t)\right] = \int \mathbf{g}(\mathbf{x}_t) p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_t$$

Filtrado estocástico

Objetivo

Hacer seguimiento de la distribución *a posteriori*, $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$, que permite calcular la esperanza de cualquier función de interés, $\mathbf{g}$, como

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x}_t)\right] = \int \mathbf{g}(\mathbf{x}_t) p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_t$$

Utilizando el teorema de Bayes, se puede demostrar fácilmente

$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) \propto p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t) \int p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}) p(\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1}) d\mathbf{x}_{t-1}$$

Filtrado estocástico

Objetivo

Hacer seguimiento de la distribución *a posteriori*, $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$, que permite calcular la esperanza de cualquier función de interés, $\mathbf{g}$, como

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x}_t)\right] = \int \mathbf{g}(\mathbf{x}_t) p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_t$$

Utilizando el teorema de Bayes, se puede demostrar fácilmente

$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) \propto p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t) \int p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}) p(\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1}) d\mathbf{x}_{t-1}$$

Filtrado estocástico

Hay incertidumbre en las observaciones o en el ruido que determina la evolución del sistema...por eso hablamos de **filtrado estocástico**[a].

[a] El filtro de Kalman también entra en esta categoría!!

Índice

Integración por Monte Carlo

Siendo X una v.a. con fdp $p(x)$, considere el problema que consiste en aproximar

$$\mathbb{E}\left[h(X)\right] = \int h(x)p(x)dx$$

para una función h integrable.

Integración por Monte Carlo

Siendo X una v.a. con fdp $p(x)$, considere el problema que consiste en aproximar

$$\mathbb{E}\left[h(X)\right] = \int h(x)p(x)dx$$

para una función h integrable.

Una manera de abordar el problema

Si somos capaces de **obtener** N **muestras i.i.d.**, $x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}$, de $p(x)$ y la varianza de la v.a. $Y = h(X)$ es finita, entonces

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} h(X^{(n)}) = \mathbb{E}\left[h(X)\right]$$

casi seguramente (c.s.).

Muestreo

En muchos problemas no es posible directamente obtener muestras de $p(x)$...

Ejemplo

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}^H \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t$$

Queremos estimar $\mathbf{x}_t$ a partir de $\mathbf{y}_t$, i.e., queremos aproximar $p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_t)$...pero no es posible obtener directamente muestras de ella (¿¿cómo??)

[2] Digamos $p(x) = Kf(x)$ siendo conocida la función $f(x)$, pero no la constante K.

Muestreo

En muchos problemas no es posible directamente obtener muestras de $p(x)$...

Ejemplo

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}^H \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t$$

Queremos estimar $\mathbf{x}_t$ a partir de $\mathbf{y}_t$, i.e., queremos aproximar $p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_t)$...pero no es posible obtener directamente muestras de ella (¿¿cómo??)

...sin embargo, tal vez $p(x)$ puede ser evaluada *hasta una constante de proporcionalidad*[2]:

$$p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_t) = \frac{p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t)p(\mathbf{x}_t)}{p(\mathbf{y}_t)} \propto p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t)p(\mathbf{x}_t)$$

[2] Digamos $p(x) = Kf(x)$ siendo conocida la función $f(x)$, pero no la constante K.

Índice

Muestreo enfatizado (Importance sampling)

Supongamos que la fdp de interés, $p(x)$, (la fdp **objetivo**) puede ser evaluada hasta una constante de proporcionalidad y

Muestreo enfatizado (Importance sampling)

Supongamos que la fdp de interés, $p(x)$, (la fdp **objetivo**) puede ser evaluada hasta una constante de proporcionalidad y

- *elijamos* una fdp, $q(x)$, conocida como **función tentativa** tal que

$$p(x) > 0 \Rightarrow q(x) > 0$$

Muestreo enfatizado (Importance sampling)

Supongamos que la fdp de interés, $p(x)$, (la fdp **objetivo**) puede ser evaluada hasta una constante de proporcionalidad y

- *elijamos* una fdp, $q(x)$, conocida como **función tentativa** tal que
$$p(x) > 0 \Rightarrow q(x) > 0$$
- definamos la función de peso como
$$w(x) = c\frac{p(x)}{q(x)}$$
donde c es una constante arbitraria (posiblemente desconocida)

Muestreo enfatizado (Importance sampling)

Supongamos que la fdp de interés, $p(x)$, (la fdp **objetivo**) puede ser evaluada hasta una constante de proporcionalidad y

- *elijamos* una fdp, $q(x)$, conocida como **función tentativa** tal que

$$p(x) > 0 \Rightarrow q(x) > 0$$

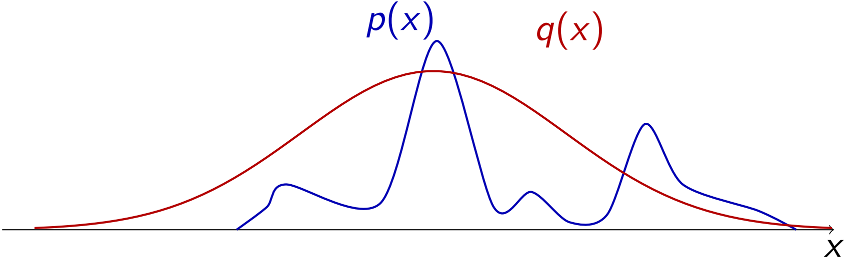
- definamos la función de peso como

$$w(x) = c\frac{p(x)}{q(x)}$$

  donde c es una constante arbitraria (posiblemente desconocida)

entonces podemos calcular la esperanza de cualquier función arbitraria $h(x)$ con respecto a $p(x)$...utilizando muestras de $q(x)$!!

Importance sampling: $q(x)$

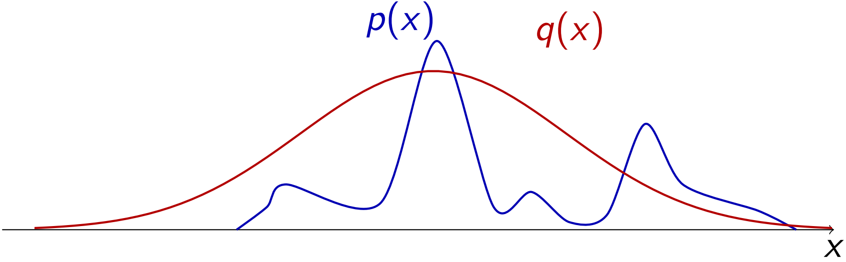


Restricción

El *soporte* de $q(x)$ debe incluir el de $p(x)$,

$$p(x) > 0 \Rightarrow q(x) > 0$$

Importance sampling: $q(x)$



Restricción

El *soporte* de $q(x)$ debe incluir el de $p(x)$,

$$p(x) > 0 \Rightarrow q(x) > 0$$

Cómo elegirla

Por motivos de eficiencia, la función tentativa debería ser los más parecida posible a la objetivo.

Importance sampling: procedimiento

...para aproximar $\mathbb{E}\left[h(X)\right]$ respecto de $p(x)$ utilizando muestras de $q(x)$

Importance sampling: procedimiento

...para aproximar $\mathbb{E}\left[h(X)\right]$ respecto de $p(x)$ utilizando muestras de $q(x)$

1. Muestrear $\mathbf{x}^{(i)} \sim q(x)$ para $i = 1, \cdots, N$

Importance sampling: procedimiento

...para aproximar $\mathbb{E}\left[h(X)\right]$ respecto de $p(x)$ utilizando muestras de $q(x)$

1. Muestrear $\mathbf{x}^{(i)} \sim q(x)$ para $i = 1, \cdots, N$
2. Calcular

$$w(\mathbf{x}^{(i)}) = c\frac{p(\mathbf{x}^{(i)})}{q(\mathbf{x}^{(i)})} \triangleq w^{*(i)} \text{ (peso \textit{sin normalizar})}$$

para $i = 1, \cdots, N$

Importance sampling: procedimiento

...para aproximar $\mathbb{E}\left[h(X)\right]$ respecto de $p(x)$ utilizando muestras de $q(x)$

1. Muestrear $\mathbf{x}^{(i)} \sim q(x)$ para $i = 1, \cdots, N$
2. Calcular
$$w(\mathbf{x}^{(i)}) = c\frac{p(\mathbf{x}^{(i)})}{q(\mathbf{x}^{(i)})} \triangleq w^{*(i)} \text{ (peso } \textit{sin normalizar}\text{))}$$
para $i = 1, \cdots, N$
3. Normalizar los pesos mediante
$$w^{(i)} = \frac{w^{*(i)}}{\sum_{j=1}^{N} w^{*(j)}}$$

Importance sampling: procedimiento

...para aproximar $\mathbb{E}\left[h(X)\right]$ respecto de $p(x)$ utilizando muestras de $q(x)$

1. Muestrear $\mathbf{x}^{(i)} \sim q(x)$ para $i = 1, \cdots, N$
2. Calcular
$$w(\mathbf{x}^{(i)}) = c\frac{p(\mathbf{x}^{(i)})}{q(\mathbf{x}^{(i)})} \triangleq w^{*(i)} \text{ (peso \textit{sin normalizar})}$$
para $i = 1, \cdots, N$
3. Normalizar los pesos mediante
$$w^{(i)} = \frac{w^{*(i)}}{\sum_{j=1}^{N} w^{*(j)}}$$
4. Aproximar $\mathbb{E}\left[h(X)\right]$ como
$$\mathbb{E}\left[h(X)\right] \approx \sum_{i=1}^{N} w^{(i)} h(\mathbf{x}^{(i)}) \tag{1}$$

Importance sampling: interpretación

IS da lugar a un conjunto de pares (`muestra`,`peso`):

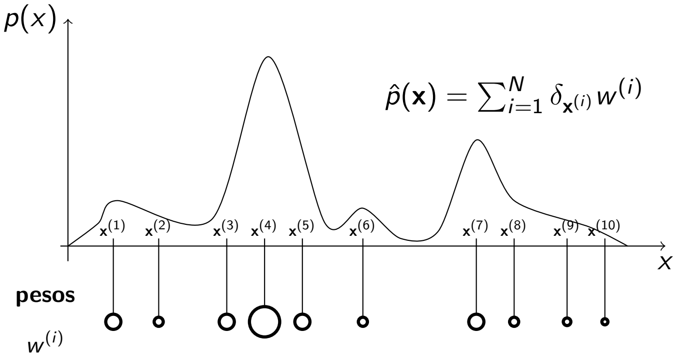
$$\left\{ \left(\mathbf{x}^{(1)}, w^{(1)}\right), \left(\mathbf{x}^{(2)}, w^{(2)}\right), \left(\mathbf{x}^{(3)}, w^{(3)}\right), \cdots \right\}$$

Importance sampling: interpretación

IS da lugar a un conjunto de pares (`muestra`,`peso`):

$$\left\{ \left(\mathbf{x}^{(1)}, w^{(1)}\right), \left(\mathbf{x}^{(2)}, w^{(2)}\right), \left(\mathbf{x}^{(3)}, w^{(3)}\right), \cdots \right\}$$

El peso se puede *interpretar* como la probabilidad de la muestra correspondiente



Importance sampling en sistemas dinámicos

? IS recursivo

¿Podemos aplicar IS **recursivamente** para estimar el estado en un sistema dinámico?

Importance sampling en sistemas dinámicos

? IS recursivo

¿Podemos aplicar IS **recursivamente** para estimar el estado en un sistema dinámico?

Consideramos un modelo dinámico en formato de espacio de estados definido por

$$\mathbf{x}_0 \sim p(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_t \sim p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}), \quad \mathbf{y}_t \sim p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)$$

Importance sampling en sistemas dinámicos

? IS recursivo

¿Podemos aplicar IS **recursivamente** para estimar el estado en un sistema dinámico?

Consideramos un modelo dinámico en formato de espacio de estados definido por

$$\mathbf{x}_0 \sim p(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_t \sim p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}), \quad \mathbf{y}_t \sim p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)$$

Ya sabemos como aproximar cualquier distribución de interés, por lo que podríamos aproximar

$$p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t}), p(\mathbf{x}_{t+1} \mid \mathbf{y}_{1:t+1}), p(\mathbf{x}_{t+2} \mid \mathbf{y}_{1:t+2}), \cdots$$

pero están relacionadas

Importance sampling en sistemas dinámicos

? IS recursivo

¿Podemos aplicar IS **recursivamente** para estimar el estado en un sistema dinámico?

Consideramos un modelo dinámico en formato de espacio de estados definido por

$$\mathbf{x}_0 \sim p(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_t \sim p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}), \quad \mathbf{y}_t \sim p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)$$

Ya sabemos como aproximar cualquier distribución de interés, por lo que podríamos aproximar

$$p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t}), p(\mathbf{x}_{t+1} \mid \mathbf{y}_{1:t+1}), p(\mathbf{x}_{t+2} \mid \mathbf{y}_{1:t+2}), \cdots$$

pero están relacionadas

Objetivo

Construir (utilizando importance sampling) una aproximación de $p(\mathbf{x}_{t+1} \mid \mathbf{y}_{1:t+1})$ utilizando una de $p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t})$.

Índice

Importance sampling en sistemas dinámicos

Supongamos que tenemos una aproximación de $p(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1})$,

$$\hat{p}^N(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) = \sum_{i=1}^{N} \delta_{\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}} w_{t-1}^{(i)}$$

Importance sampling en sistemas dinámicos

Supongamos que tenemos una aproximación de $p(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1})$,

$$\hat{p}^N(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) = \sum_{i=1}^{N} \delta_{\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}} w_{t-1}^{(i)}$$

$$p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t}) = \frac{p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{y}_{1:t-1}) p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t-1})}{p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{y}_{1:t-1})}$$

Importance sampling en sistemas dinámicos

Supongamos que tenemos una aproximación de $p(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1})$,

$$\hat{p}^N(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) = \sum_{i=1}^{N} \delta_{\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}} w_{t-1}^{(i)}$$

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t}) &= \frac{p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{y}_{1:t-1}) p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t-1})}{p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{y}_{1:t-1})} \\ &\propto p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{y}_{1:t-1}) p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) \end{aligned}$$

Importance sampling en sistemas dinámicos

Supongamos que tenemos una aproximación de $p(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1})$,

$$\hat{p}^N(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) = \sum_{i=1}^{N} \delta_{\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}} w_{t-1}^{(i)}$$

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t}) &= \frac{p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{y}_{1:t-1}) p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t-1})}{p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{y}_{1:t-1})} \\
&\propto p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{y}_{1:t-1}) p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) \\
&= p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t) \int p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{y}_{1:t-1}) p(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) d\mathbf{x}_{t-1}
\end{aligned}$$

Importance sampling en sistemas dinámicos

Supongamos que tenemos una aproximación de $p(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1})$,

$$\hat{p}^N(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) = \sum_{i=1}^{N} \delta_{\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}} w_{t-1}^{(i)}$$

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t}) &= \frac{p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{y}_{1:t-1}) p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t-1})}{p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{y}_{1:t-1})} \\
&\propto p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{y}_{1:t-1}) p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) \\
&= p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t) \int p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{y}_{1:t-1}) p(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) d\mathbf{x}_{t-1} \\
&\approx p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t) \int p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{y}_{1:t-1}) \hat{p}^N(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) d\mathbf{x}_{t-1}
\end{aligned}$$

Importance sampling en sistemas dinámicos

Supongamos que tenemos una aproximación de $p(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1})$,

$$\hat{p}^N(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) = \sum_{i=1}^{N} \delta_{\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}} w_{t-1}^{(i)}$$

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t}) &= \frac{p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{y}_{1:t-1}) p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t-1})}{p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{y}_{1:t-1})} \\
&\propto p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{y}_{1:t-1}) p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) \\
&= p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t) \int p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{y}_{1:t-1}) p(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) d\mathbf{x}_{t-1} \\
&\approx p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t) \int p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{y}_{1:t-1}) \hat{p}^N(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) d\mathbf{x}_{t-1} \\
&= p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t) \sum_{i=1}^{N} p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t-1}) w_{t-1}^{(i)}
\end{aligned}$$

Filtrado de partículas

- **Inicialización**

Filtrado de partículas

- **Inicialización**
  - Se toman muestras de la prior,

$$\mathbf{x}_0^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_0),\ i = 1, \cdots, N,$$

  - se inicializan todos los pesos al mismo valor

$$w_i^{(0)} = 1/N, i = 1, \cdots, N$$

Filtrado de partículas

- **Inicialización**
  - Se toman muestras de la prior,
  $$\mathbf{x}_0^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_0),\ i = 1, \cdots, N,$$
  - se inicializan todos los pesos al mismo valor
  $$w_i^{(0)} = 1/N, i = 1, \cdots, N$$
- **Recursión** en el instante t
  - tomar muestras, $\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)}, \cdots$, de la función tentativa elegida
  $$\mathbf{x}_t^{(i)} \sim q(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t})$$
  - calcular los pesos
  $$w_t^{(i)} \propto \frac{p(\mathbf{x}_t^{(i)} \mid \mathbf{y}_{1:t})}{q(\mathbf{x}_t^{(i)} \mid \mathbf{y}_{1:t})} = \frac{p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t^{(i)}) \sum_{i=1}^{N} p(\mathbf{x}_t^{(i)} \mid \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t-1}) w_{t-1}^{(i)}}{q(\mathbf{x}_t^{(i)} \mid \mathbf{y}_{1:t})}$$

Filtrado de partículas

- **Inicialización**
  - Se toman muestras de la prior,

$$\mathbf{x}_0^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_0),\ i = 1, \cdots, N,$$

  - se inicializan todos los pesos al mismo valor

$$w_i^{(0)} = 1/N, i = 1, \cdots, N$$

- **Recursión** en el instante t
  - tomar muestras, $\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)}, \cdots$, de la función tentativa elegida

$$\mathbf{x}_t^{(i)} \sim q(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t})$$

  - calcular los pesos

$$w_t^{(i)} \propto \frac{p(\mathbf{x}_t^{(i)} \mid \mathbf{y}_{1:t})}{q(\mathbf{x}_t^{(i)} \mid \mathbf{y}_{1:t})} = \frac{p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t^{(i)}) \sum_{i=1}^{N} p(\mathbf{x}_t^{(i)} \mid \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t-1}) w_{t-1}^{(i)}}{q(\mathbf{x}_t^{(i)} \mid \mathbf{y}_{1:t})}$$

Este esquema es conocido como **filtrado de partículas** o *importance sampling* secuencial (SIS). Con muestras, se puede utilizar (1) para aprox. cualquier integral respecto de $p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t})$.

El filtro *bootstrap*

Si elegimos como función tentativa

$$q(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t}) = \sum_{i=1}^{N} p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t-1}) w_{t-1}^{(i)}$$

El filtro *bootstrap*

Si elegimos como función tentativa

$$q(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t}) = \sum_{i=1}^{N} p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t-1}) w_{t-1}^{(i)}$$

el cálculo de los pesos es muy sencillo

$$w_t^{(i)} \propto \frac{p(\mathbf{x}_t^{(i)} \mid \mathbf{y}_{1:t})}{q(\mathbf{x}_t^{(i)} \mid \mathbf{y}_{1:t})} = \frac{p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t^{(i)}) \cancel{\sum_{i=1}^{N} p(\mathbf{x}_t^{(i)} \mid \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t-1}) w_{t-1}^{(i)}}}{\cancel{\sum_{i=1}^{N} p(\mathbf{x}_t^{(i)} \mid \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t-1}) w_{t-1}^{(i)}}}$$

$$= p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t^{(i)})$$

El filtro *bootstrap*

Si elegimos como función tentativa

$$q(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t}) = \sum_{i=1}^{N} p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t-1}) w_{t-1}^{(i)}$$

el cálculo de los pesos es muy sencillo

$$\begin{aligned} w_t^{(i)} \propto \frac{p(\mathbf{x}_t^{(i)} \mid \mathbf{y}_{1:t})}{q(\mathbf{x}_t^{(i)} \mid \mathbf{y}_{1:t})} &= \frac{p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t^{(i)}) \cancel{\sum_{i=1}^{N} p(\mathbf{x}_t^{(i)} \mid \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t-1}) w_{t-1}^{(i)}}}{\cancel{\sum_{i=1}^{N} p(\mathbf{x}_t^{(i)} \mid \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t-1}) w_{t-1}^{(i)}}} \\ &= p(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{x}_t^{(i)}) \end{aligned}$$

El algoritmo resultante es el filtro *bootstrap*, considerado el primer filtro de partículas

El filtro *bootstrap*: la función tentativa

Muestrear de la función tentativa

$$q(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t}) = \sum_{i=1}^{N} p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t-1}) w_{t-1}^{(i)}$$

se puede interpretar como un procedimiento que consta de dos pasos:

El filtro *bootstrap*: la función tentativa

Muestrear de la función tentativa

$$q(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t}) = \sum_{i=1}^{N} p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t-1}) w_{t-1}^{(i)}$$

se puede interpretar como un procedimiento que consta de dos pasos:

- **remuestrear** la aproximación previa

$$\left\{ \left(\mathbf{x}_{t-1}^{(1)}, w_{t-1}^{(1)}\right), \left(\mathbf{x}_{t-1}^{(2)}, w_{t-1}^{(2)}\right), \left(\mathbf{x}_{t-1}^{(3)}, w_{t-1}^{(3)}\right), \cdots \right\}$$

  para obtener $\mathbf{x}_{t-1}^{(j_1)}, \mathbf{x}_{t-1}^{(j_2)}, \cdots, \mathbf{x}_{t-1}^{(j_t)}$ con $j_1, j_2, \cdots, j_t \in \{1, \cdots, N\}$

El filtro *bootstrap*: la función tentativa

Muestrear de la función tentativa

$$q(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t}) = \sum_{i=1}^{N} p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t-1}) w_{t-1}^{(i)}$$

se puede interpretar como un procedimiento que consta de dos pasos:

- **remuestrear** la aproximación previa

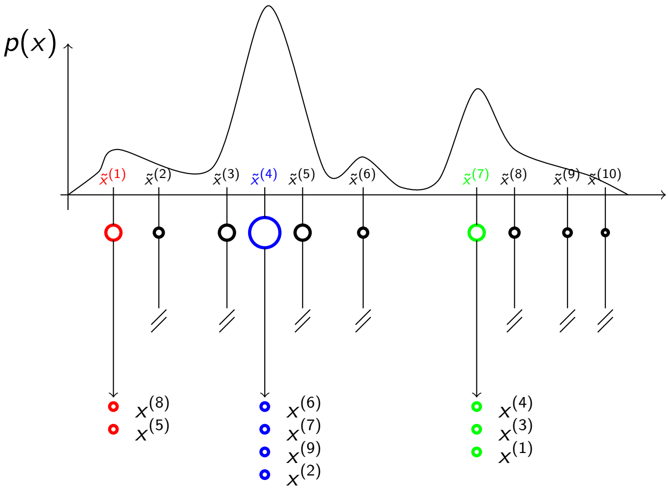
$$\left\{ \left(\mathbf{x}_{t-1}^{(1)}, w_{t-1}^{(1)}\right), \left(\mathbf{x}_{t-1}^{(2)}, w_{t-1}^{(2)}\right), \left(\mathbf{x}_{t-1}^{(3)}, w_{t-1}^{(3)}\right), \cdots \right\}$$

  para obtener $\mathbf{x}_{t-1}^{(j_1)}, \mathbf{x}_{t-1}^{(j_2)}, \cdots, \mathbf{x}_{t-1}^{(j_t)}$ con $j_1, j_2, \cdots, j_t \in \{1, \cdots, N\}$

- **propagar** cada partícula remuestreada utilizando la fdp de transición, $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})$,

$$x_t^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}^{(j_i)}), i = 1, \cdots, N$$

Remuestreo


$p(x)$
$\tilde{x}^{(1)}$
$\tilde{x}^{(2)}$
$\tilde{x}^{(3)}$
$\tilde{x}^{(4)}$
$\tilde{x}^{(5)}$
$\tilde{x}^{(6)}$
$\tilde{x}^{(7)}$
$\tilde{x}^{(8)}$
$\tilde{x}^{(9)}$
$\tilde{x}^{(10)}$
$x^{(8)}$
$x^{(5)}$
$x^{(6)}$
$x^{(7)}$
$x^{(9)}$
$x^{(2)}$
$x^{(4)}$
$x^{(3)}$
$x^{(1)}$

El filtro *bootstrap*: implementación

- **Inicialización**
  - muestrear $\mathbf{x}_0^{(i)}, i = 1, \cdots, N$ de la *prior* $p(\mathbf{x}_0)$
- **Recursión** dado $\hat{p}^N(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) = \sum_{i=1}^N w^{(i)} \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{t-1}^{(i)}}$,

1. remuestreo: sea $\mathbf{x}_{t-1}^{(i)} = \tilde{\mathbf{x}}_{t-1}^{(j)}$ con probabilidad $w^{(j)}, i = 1, \cdots, N, j \in \{1, \cdots, N\}$.
2. propagación (muestreo)

$$\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}), i = 1, \cdots, N$$

3. cálculo de los pesos...

$$w^{*(i)} = p(\mathbf{y}_t \mid \tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}), i = 1, \cdots, N$$

...y normalización

$$w^{(i)} = \frac{w^{*(i)}}{\sum_{j=1}^N w^{*(j)}}, i = 1, \cdots, N$$

El filtro *bootstrap*: implementación

- **Inicialización**
  - muestrear $\mathbf{x}_0^{(i)}, i = 1, \cdots, N$ de la *prior* $p(\mathbf{x}_0)$
- **Recursión** dado $\hat{p}^N(\mathbf{x}_{t-1} \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}}$,
  1. propagación (muestreo)
     $$\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}), i = 1, \cdots, N$$
  2. cálculo de los pesos...
     $$w^{*(i)} = p(\mathbf{y}_t \mid \tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}), i = 1, \cdots, N$$
     ...y normalización
     $$w^{(i)} = \frac{w^{*(i)}}{\sum_{j=1}^N w^{*(j)}}, i = 1, \cdots, N$$
  3. remuestreo: sea $\mathbf{x}_t^{(i)} = \tilde{\mathbf{x}}_t^{(j)}$ con probabilidad $w^{(j)}, i = 1, \cdots, N, j \in \{1, \cdots, N\}$.

El filtro *bootstrap*: visión general

1. **Inicialización**

$$\mathbf{x}_0^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_0) \text{ para } i = 1, \cdots, N$$

2. **Paso recursivo:** partiendo de $\boxed{\text{muestras en el instante } t-1}$

2.1. **Propagación de muestras**

$$\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} \sim p\left(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}\right)$$

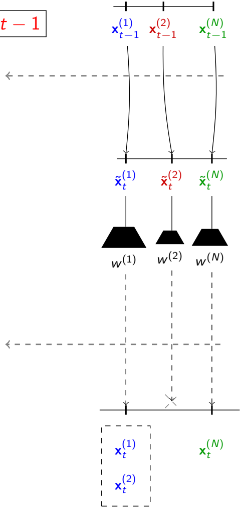
2.2. **Cálculo de pesos y normalización**

$$w^{(i)} \propto p\left(\mathbf{y}_t \mid \tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}\right), i = 1, \cdots, N$$

2.3. **Remuestreo**

$$\mathbf{x}_t^{(i)} = \tilde{\mathbf{x}}_t^{(j)}, i = 1, \cdots, N$$
$$\text{con probabilidad } w^{(j)}, j \in \{1, \cdots, N\}$$

$\boxed{\text{muestras en el instante } t}$



El filtro *bootstrap*: epílogo

En la implementación dada arriba, al final de cada iteración tenemos muestras

$$\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)}, \cdots \mathbf{x}_t^{(N)}$$

que constituyen una aproximación de

$$p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t}),$$

El filtro *bootstrap*: epílogo

En la implementación dada arriba, al final de cada iteración tenemos muestras

$$\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)}, \cdots \mathbf{x}_t^{(N)}$$

que constituyen una aproximación de

$$p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t}),$$

pero el objetivo inicial era aproximar la esperanza de una función de interés (conocida), $\mathbf{g}$, con respecto a $p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t})$, i.e.,

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x}_t)\right] = \int \mathbf{g}(\mathbf{x}_t) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_t.$$

El filtro *bootstrap*: epílogo

En la implementación dada arriba, al final de cada iteración tenemos muestras

$$\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)}, \cdots \mathbf{x}_t^{(N)}$$

que constituyen una aproximación de

$$p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t}),$$

pero el objetivo inicial era aproximar la esperanza de una función de interés (conocida), $\mathbf{g}$, con respecto a $p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t})$, i.e.,

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x}_t)\right] = \int \mathbf{g}(\mathbf{x}_t) p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_t.$$

Simplemente utilizamos las muestras para obtener una aproximación por Monte Carlo,

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x}_t)\right] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{g}(\mathbf{x}_t^{(n)})$$