Redes de Sensores

Estimación

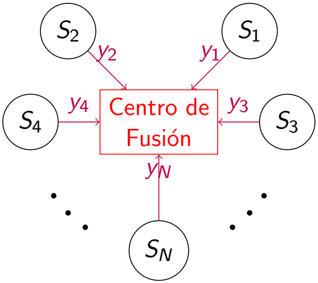
Manuel A. Vázquez
Joaquín Míguez
Jose Miguel Leiva

4 de febrero de 2024

Índice

Índice

Red para estimación centralizada



Estructura de la red con N sensores ($i = 1, \ldots, N$):

- $S_i \equiv$ sensor i-ésimo
- $y_i \equiv$ observación en el sensor i-ésimo

El CF debe utilizar el conjunto de observaciones para estimar un vector $\mathbf{x}$ de dimensiones $M \times 1$.

Estimación clásica

La estimación de **x** dada la colección de datos $\mathbf{y} = \{y_1, ..., y_N\}$ es equivalente a un problema de estimación *clásico*. Hay varios estimadores posibles:

Estimación clásica

La estimación de $\mathbf{x}$ dada la colección de datos $\mathbf{y} = \{y_1, ..., y_N\}$ es equivalente a un problema de estimación *clásico*. Hay varios estimadores posibles:

- Máxima verosimilitud (ML$\equiv$ maximum likelihood)

$$\hat{\mathbf{x}}^{ML} = \arg\max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}).$$

Estimación clásica

La estimación de $\mathbf{x}$ dada la colección de datos $\mathbf{y} = \{y_1, ..., y_N\}$ es equivalente a un problema de estimación *clásico*. Hay varios estimadores posibles:

- Máxima verosimilitud (ML$\equiv$ maximum likelihood)

$$\hat{\mathbf{x}}^{ML} = \arg\max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}).$$

- Máximo a posteriori (MAP)

$$\hat{\mathbf{x}}^{MAP} = \arg\max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}).$$

Estimación clásica

La estimación de $\mathbf{x}$ dada la colección de datos $\mathbf{y} = \{y_1, ..., y_N\}$ es equivalente a un problema de estimación *clásico*. Hay varios estimadores posibles:

- Máxima verosimilitud (ML$\equiv$ maximum likelihood)

$$\hat{\mathbf{x}}^{ML} = \arg\max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}).$$

- Máximo a posteriori (MAP)

$$\hat{\mathbf{x}}^{MAP} = \arg\max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}).$$

- Mínimo error cuadrático medio (MMSE)

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}^{MMSE} &= \arg\min_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbb{E}\left[\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\|^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{x}|\mathbf{y}\right] = \int \mathbf{x}p(\mathbf{x}|\mathbf{y})d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Índice

Modelo dinámico

Un problema más interesante...

¿Y si la variable de interés cambia con el tiempo?

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_t$$

siendo t una variable temporal discreta. Si $\mathbf{x}$ era una variable aleatoria, entonces $\mathbf{x}_t$ es un *proceso estocástico*.

Modelo dinámico

Un problema más interesante...

¿Y si la variable de interés cambia con el tiempo?

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_t$$

siendo t una variable temporal discreta. Si $\mathbf{x}$ era una variable aleatoria, entonces $\mathbf{x}_t$ es un *proceso estocástico*.

Objetivo

Queremos hacer un **seguimiento** de la evolución de $\mathbf{x}$ con el tiempo.

Modelo dinámico

Un problema más interesante...

¿Y si la variable de interés cambia con el tiempo?

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}_t$$

siendo t una variable temporal discreta. Si $\mathbf{x}$ era una variable aleatoria, entonces $\mathbf{x}_t$ es un *proceso estocástico*.

Objetivo

Queremos hacer un **seguimiento** de la evolución de $\mathbf{x}$ con el tiempo.

Entonces, necesitamos dos ecuaciones

Modelo dinámico

Un problema más interesante...

¿Y si la variable de interés cambia con el tiempo?

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}_t$$

siendo t una variable temporal discreta. Si $\mathbf{x}$ era una variable aleatoria, entonces $\mathbf{x}_t$ es un *proceso estocástico*.

Objetivo

Queremos hacer un **seguimiento** de la evolución de $\mathbf{x}$ con el tiempo.

Entonces, necesitamos dos ecuaciones

- una ecuación de estado que modele la evolución de la variable de interés

Modelo dinámico

Un problema más interesante...

¿Y si la variable de interés cambia con el tiempo?

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_t$$

siendo t una variable temporal discreta. Si $\mathbf{x}$ era una variable aleatoria, entonces $\mathbf{x}_t$ es un *proceso estocástico*.

Objetivo

Queremos hacer un **seguimiento** de la evolución de $\mathbf{x}$ con el tiempo.

Entonces, necesitamos dos ecuaciones

- una ecuación de estado que modele la evolución de la variable de interés
- una ecuación de observación que modele la relación entre la variable de interés y lo observado

Modelo lineal y gaussiano

Modelo lineal y gaussiano

- El proceso $\mathbf{x}_t$ evoluciona de acuerdo a un modelo lineal y gaussiano

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t \qquad \text{(ecuación de estado)}$$

donde $\mathbf{F}$ es una matriz $M \times M$, y $\mathbf{v}_t$ es un vector aleatorio $M \times 1$ gaussiano de media $\mathbf{0}$ y covarianza $\mathbf{Q}$, siendo M el número de elementos en $\mathbf{x}_t$.

Modelo lineal y gaussiano

- El proceso $\mathbf{x}_t$ evoluciona de acuerdo a un modelo lineal y gaussiano

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t \qquad \text{(ecuación de estado)}$$

  donde $\mathbf{F}$ es una matriz $M \times M$, y $\mathbf{v}_t$ es un vector aleatorio $M \times 1$ gaussiano de media $\mathbf{0}$ y covarianza $\mathbf{Q}$, siendo M el número de elementos en $\mathbf{x}_t$.

- La relación entre la variable de interés $\mathbf{x}_t$ y las observaciones viene dada por

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t \qquad \text{(ecuación de observación)}$$

  donde $\mathbf{H}$ es una matriz $N \times M$ y $\mathbf{w}_t$ es un vector aleatorio $N \times 1$ gaussiano de media $\mathbf{0}$ y covarianza $\mathbf{R}$.

Modelo lineal y gaussiano

- El proceso $\mathbf{x}_t$ evoluciona de acuerdo a un modelo lineal y gaussiano

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t \qquad \text{(ecuación de estado)}$$

  donde $\mathbf{F}$ es una matriz $M \times M$, y $\mathbf{v}_t$ es un vector aleatorio $M \times 1$ gaussiano de media $\mathbf{0}$ y covarianza $\mathbf{Q}$, siendo M el número de elementos en $\mathbf{x}_t$.

- La relación entre la variable de interés $\mathbf{x}_t$ y las observaciones viene dada por

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t \qquad \text{(ecuación de observación)}$$

  donde $\mathbf{H}$ es una matriz $N \times M$ y $\mathbf{w}_t$ es un vector aleatorio $N \times 1$ gaussiano de media $\mathbf{0}$ y covarianza $\mathbf{R}$.

Las observaciones...

...dadas por el vector $\mathbf{y}_t$, recogen las medidas tomadas por todos los sensores

Ejemplo I

Objetivo

Localización y seguimiento de un objeto con velocidad constante y *conocida* $\mathbf{c}$.

Ejemplo I

Objetivo

Localización y seguimiento de un objeto con velocidad constante y *conocida* $\mathbf{c}$.

- La posición del objetivo, $\mathbf{x}_t$ (que aquí representa el estado del sistema), evoluciona de acuerdo a

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{c}T + \mathbf{v}_t,$$

donde T es el período de muestreo, i.e., el tiempo transcurrido entre dos observaciones consecutivas.

Ejemplo I

Objetivo

Localización y seguimiento de un objeto con velocidad constante y *conocida* **c**.

- La posición del objetivo, $\mathbf{x}_t$ (que aquí representa el estado del sistema), evoluciona de acuerdo a

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{c}T + \mathbf{v}_t,$$

donde T es el período de muestreo, i.e., el tiempo transcurrido entre dos observaciones consecutivas.

- Observamos directamente la posición:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t$$

Ejemplo II

Objetivo

Localización y seguimiento de un objeto con velocidad constante *desconocida*.

Ejemplo II

Objetivo

Localización y seguimiento de un objeto con velocidad constante *desconocida*.

Para estimar la velocidad, la incluimos en el estado del sistema

$$\mathbf{x}'_t = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

Ejemplo II

Objetivo

Localización y seguimiento de un objeto con velocidad constante *desconocida*.

Para estimar la velocidad, la incluimos en el estado del sistema

$$\mathbf{x}'_t = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

- La ecuación de estado es ahora

$$\mathbf{x}'_t = \mathbf{F}\mathbf{x}'_{t-1} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \text{ with } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Ejemplo II

Objetivo

Localización y seguimiento de un objeto con velocidad constante *desconocida*.

Para estimar la velocidad, la incluimos en el estado del sistema

$$\mathbf{x}'_t = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

- La ecuación de estado es ahora

$$\mathbf{x}'_t = \mathbf{F}\mathbf{x}'_{t-1} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \text{ with } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

- ...y la ecuación de observación

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}'_t + \mathbf{w}_t, \text{ with } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Índice

¿Qué es el filtro de Kalman?

Es un método recursivo para el cálculo de distribuciones de probabilidad a posteriori en sistemas dinámicos lineales y gaussianos.

¿Qué es el filtro de Kalman?

Es un método recursivo para el cálculo de distribuciones de probabilidad a posteriori en sistemas dinámicos lineales y gaussianos.

- recursivo: nos da una estimación en un determinado instante de tiempo utilizando la estimación del instante anterior (igual que hacen los algoritmos adaptativos).

¿Qué es el filtro de Kalman?

Es un método recursivo para el cálculo de distribuciones de probabilidad a posteriori en sistemas dinámicos lineales y gaussianos.

- recursivo: nos da una estimación en un determinado instante de tiempo utilizando la estimación del instante anterior (igual que hacen los algoritmos adaptativos).
- calcula distribuciones de probabilidad: no nos va a dar una estimación del parámetro de interés sino su distribución (determinada por la media y la matriz de covarianza).

¿Qué es el filtro de Kalman?

Es un método recursivo para el cálculo de distribuciones de probabilidad a posteriori en sistemas dinámicos lineales y gaussianos.

- recursivo: nos da una estimación en un determinado instante de tiempo utilizando la estimación del instante anterior (igual que hacen los algoritmos adaptativos).
- calcula distribuciones de probabilidad: no nos va a dar una estimación del parámetro de interés sino su distribución (determinada por la media y la matriz de covarianza).
- ...en sistemas dinámicos: en sistemas que cambian con el tiempo

¿Qué es el filtro de Kalman?

Es un método recursivo para el cálculo de distribuciones de probabilidad a posteriori en sistemas dinámicos lineales y gaussianos.

- recursivo: nos da una estimación en un determinado instante de tiempo utilizando la estimación del instante anterior (igual que hacen los algoritmos adaptativos).
- calcula distribuciones de probabilidad: no nos va a dar una estimación del parámetro de interés sino su distribución (determinada por la media y la matriz de covarianza).
- ...en sistemas dinámicos: en sistemas que cambian con el tiempo
- lineales: las ecuaciones que modelan el sistema son lineales con respecto a la variable de interés.

¿Qué es el filtro de Kalman?

Es un método recursivo para el cálculo de distribuciones de probabilidad a posteriori en sistemas dinámicos lineales y gaussianos.

- recursivo: nos da una estimación en un determinado instante de tiempo utilizando la estimación del instante anterior (igual que hacen los algoritmos adaptativos).
- calcula distribuciones de probabilidad: no nos va a dar una estimación del parámetro de interés sino su distribución (determinada por la media y la matriz de covarianza).
- ...en sistemas dinámicos: en sistemas que cambian con el tiempo
- lineales: las ecuaciones que modelan el sistema son lineales con respecto a la variable de interés.
- gaussianos: el ruido que afecta a esas mismas ecuaciones es gaussiano.

Sistema dinámico en formato de espacio de estados

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t \quad \longleftarrow$$ ecuación de estado

Sistema dinámico en formato de espacio de estados

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t \quad \longleftarrow$$ ecuación de estado

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t \quad \longleftarrow$$ ecuación de observación

Sistema dinámico en formato de espacio de estados

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{x}_t = \mathbf{F}_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t & \longleftarrow \text{ecuación de estado} \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t & \longleftarrow \text{ecuación de observación} \end{array}\right\} \text{sistema dinámico en formato de espacio de estados}$$

Sistema dinámico en formato de espacio de estados

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t \quad \longleftarrow \text{ ecuación de estado}$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t \quad \longleftarrow \text{ ecuación de observación}$$

$\left.\begin{matrix} \text{ecuación de estado} \\ \text{ecuación de observación} \end{matrix}\right\}$ sistema dinámico en formato de espacio de estados

Objetivo

Estimar (recursivamente) el estado del sistema $\mathbf{x}_t$ dadas las observaciones, $\mathbf{y}_t$

El índice temporal es discreto, i.e, $t = 0, 1, \cdots$

Notación

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t$$

- $\mathbf{x}_t$ es el vector de estado (del sistema) en el instante t
- $\mathbf{F}_t$ es la matriz de transición de estado: determina la evolución del estado del sistema
- $\mathbf{v}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{v}_t | \mathbf{0}, \mathbf{Q}_t)$ es el ruido estado (o de proceso)
  - $\mathbf{Q}_t$ es la matriz de covarianza del ruido de estado (puede ser variante con el tiempo)

Notación

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t$$

- $\mathbf{x}_t$ es el vector de estado (del sistema) en el instante t
- $\mathbf{F}_t$ es la matriz de transición de estado: determina la evolución del estado del sistema
- $\mathbf{v}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{v}_t|\mathbf{0}, \mathbf{Q}_t)$ es el ruido estado (o de proceso)
    - $\mathbf{Q}_t$ es la matriz de covarianza del ruido de estado (puede ser variante con el tiempo)

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t$$

- $\mathbf{y}_t$ es el el vector de observaciones
- $\mathbf{H}_t$ es la matriz de observaciones: relaciona las observaciones con el estado (desconocido)
- $\mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}_t|\mathbf{0}, \mathbf{R}_t)$ es el ruido de observación
    - $\mathbf{R}_t$ es la matriz de covarianza del ruido de observación (puede ser variante con el tiempo)

Filtrado: hipótesis de partida

La distribución *a priori* (inicial) del estado es Gaussiana, i.e.,

$$p(\mathbf{x}_0) \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_0 | \hat{\mathbf{x}}_{0|0}, \mathbf{P}_{0|0}\right)$$

siendo **conocidas**

- $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$: la media de la distribución del estado <u>en el instante 0</u>
- $\mathbf{P}_{0|0}$: matriz de cov. de la distr. del estado <u>en el instante 0</u>

Filtrado: hipótesis de partida

La distribución *a priori* (inicial) del estado es Gaussiana, i.e.,

$$p(\mathbf{x}_0) \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_0 | \hat{\mathbf{x}}_{0|0}, \mathbf{P}_{0|0}\right)$$

siendo **conocidas**

- $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$: la media de la distribución del estado <u>en el instante 0</u>
- $\mathbf{P}_{0|0}$: matriz de cov. de la distr. del estado <u>en el instante 0</u>

Notación

- $\hat{\mathbf{x}}_{a|b} \equiv$ media estimada en el instante a utilizando las observaciones hasta el instante b
- $\mathbf{P}_{a|b} \equiv$ matriz de covarianza estimada en el instante a utilizando las observaciones hasta el instante b

Filtrado: hipótesis de partida

La distribución *a priori* (inicial) del estado es Gaussiana, i.e.,

$$p(\mathbf{x}_0) \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_0 | \hat{\mathbf{x}}_{0|0}, \mathbf{P}_{0|0}\right)$$

siendo **conocidas**

- $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$: la media de la distribución del estado <u>en el instante 0</u>
- $\mathbf{P}_{0|0}$: matriz de cov. de la distr. del estado <u>en el instante 0</u>

Notación

- $\hat{\mathbf{x}}_{a|b} \equiv$ media estimada en el instante a utilizando las observaciones hasta el instante b
- $\mathbf{P}_{a|b} \equiv$ matriz de covarianza estimada en el instante a utilizando las observaciones hasta el instante b

Al principio

En el instante 0 no hay ninguna observación disponible...pero la notación sigue siendo conveniente.

Filtrado: recursión

Si se cumple la hipótesis de partida, entonces para $t = 1, 2, \cdots$

Filtrado: recursión

Si se cumple la hipótesis de partida, entonces para $t = 1, 2, \cdots$

$$p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_t | \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}, \mathbf{P}_{t|t-1}\right) \quad \longleftarrow \quad \text{fdp predictiva}$$

Filtrado: recursión

Si se cumple la hipótesis de partida, entonces para $t = 1, 2, \cdots$

$$p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_t | \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}, \mathbf{P}_{t|t-1}\right) \quad \longleftarrow \quad \text{fdp predictiva}$$

$$p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t}) \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_t | \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, \mathbf{P}_{t|t}\right) \quad \longleftarrow \quad \text{fdp filtrada}$$

...esto es, ambas fdp's son Gaussianas si la distribución inicial es Gaussiana, y el **filtro de Kalman** nos da sus medias y covarianzas en un proceso que involucra dos etapas...

Notación

$y_{i:j} \equiv \{y_i, y_{i+1}, \cdots, y_j\}$

Solución

Etapa predictiva

$$\left.\begin{array}{lcl} \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} = \mathbf{F}_{t-1}\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} & \longleftarrow & \text{media predictiva} \\ \mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{Q}_{t-1} + \mathbf{F}_{t-1}\mathbf{P}_{t-1|t-1}\mathbf{F}_{t-1}^{H} & \longleftarrow & \text{covarianza predictiva} \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{asociadas a la fdp}\\ \text{predictiva}\end{array}$$

Solución

Etapa predictiva

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} = \mathbf{F}_{t-1}\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} \quad \longleftarrow \quad \text{media predictiva}$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{Q}_{t-1} + \mathbf{F}_{t-1}\mathbf{P}_{t-1|t-1}\mathbf{F}_{t-1}^{H} \quad \longleftarrow \quad \text{covarianza predictiva}$$

asociadas a la fdp predictiva

Etapa de actualización

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{H}_t^H\left(\mathbf{H}_t\mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{H}_t^H + \mathbf{R}_t\right)^{-1} \quad \longleftarrow \quad \text{ganancia de Kalman}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t\left(\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}\right) \quad \longleftarrow \quad \text{media filtrada}$$

$$\mathbf{P}_{t|t} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t\right)\mathbf{P}_{t|t-1} \quad \longleftarrow \quad \text{covarianza filtrada}$$

asociadas a la fdp filtrada

Observaciones

- Para poder aplicar el KF

[1] ...porque una gaussiana está completamente determinada por su media y matriz de covarianza.

Observaciones

- Para poder aplicar el KF
  - el **sistema** tiene que ser **lineal**

[1]...porque una gaussiana está completamente determinada por su media y matriz de covarianza.

Observaciones

- Para poder aplicar el KF
  - el **sistema** tiene que ser **lineal**
  - el **ruido** tiene que ser **gaussiano**

[1] ...porque una gaussiana está completamente determinada por su media y matriz de covarianza.

Observaciones

- Para poder aplicar el KF
  - el **sistema** tiene que ser **lineal**
  - el **ruido** tiene que ser **gaussiano**
  - la **distribución inicial** del estado tiene que ser **gaussiana**

[1]...porque una gaussiana está completamente determinada por su media y matriz de covarianza.

Observaciones

- Para poder aplicar el KF
  - el **sistema** tiene que ser **lineal**
  - el **ruido** tiene que ser **gaussiano**
  - la **distribución inicial** del estado tiene que ser **gaussiana**
- El KF nos da (como salida) una distribución de probabilidad[1], que contiene toda la información acerca del parámetro de interés

En nuestro caso...

$p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t})$ contiene toda la información disponible en el instante t acerca de $\mathbf{x}_t$, y a partir de ella podemos obtener la media, mediana, moda...

[1] ...porque una gaussiana está completamente determinada por su media y matriz de covarianza.

Observaciones

- Para poder aplicar el KF
  - el **sistema** tiene que ser **lineal**
  - el **ruido** tiene que ser **gaussiano**
  - la **distribución inicial** del estado tiene que ser **gaussiana**
- El KF nos da (como salida) una distribución de probabilidad[1], que contiene toda la información acerca del parámetro de interés

> **En nuestro caso...**
>
> $p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t})$ contiene toda la información disponible en el instante t acerca de $\mathbf{x}_t$, y a partir de ella podemos obtener la media, mediana, moda...

- $\hat{\mathbf{x}}_{t|t} \equiv$ estimador MMSE del estado en el instante t

[1] ...porque una gaussiana está completamente determinada por su media y matriz de covarianza.

Observaciones

- Para poder aplicar el KF
  - el **sistema** tiene que ser **lineal**
  - el **ruido** tiene que ser **gaussiano**
  - la **distribución inicial** del estado tiene que ser **gaussiana**
- El KF nos da (como salida) una distribución de probabilidad[1], que contiene toda la información acerca del parámetro de interés

> **En nuestro caso...**
>
> $p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t})$ contiene toda la información disponible en el instante t acerca de $\mathbf{x}_t$, y a partir de ella podemos obtener la media, mediana, moda...

- $\hat{\mathbf{x}}_{t|t} \equiv$ estimador MMSE del estado en el instante t
- $\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{P}_{t|t}\right\} \equiv$ error mínimo (valor del error cuadrático en $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$)

[1] ...porque una gaussiana está completamente determinada por su media y matriz de covarianza.

Índice

Ecuaciones de estado y observación

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B}_t\mathbf{u}_t + \mathbf{v}_{t-1} \quad \longleftarrow \quad \text{ecuación de estado}$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t \quad \longleftarrow \quad \text{ecuación de observación}$$

El término de control, $\mathbf{B}_t\mathbf{u}_t$, con

- $\mathbf{B}_t$ es la matriz de control, y
- $\mathbf{u}_t$ el vector de control

es **conocido** (en todo instante de tiempo t) y es un mecanismo para modificar el estado (desconocido).

¿Para qué sirve el término de control?

- ...a veces podemos ejercer un cierto *control* sobre aquello que queremos estimar

example

Problema: estimar la trayectoria de un dron que nosotros mismos manejamos

[2] ...por lo que debe figurar en dicha ecuación!!

¿Para qué sirve el término de control?

- ...a veces podemos ejercer un cierto *control* sobre aquello que queremos estimar

> **example**
>
> Problema: estimar la trayectoria de un dron que nosotros mismos manejamos

- ...desde un punto de vista matemático, es útil para modelar funciones *afines*

[2] ...por lo que debe figurar en dicha ecuación!!

¿Para qué sirve el término de control?

- ...a veces podemos ejercer un cierto *control* sobre aquello que queremos estimar

example

Problema: estimar la trayectoria de un dron que nosotros mismos manejamos

- ...desde un punto de vista matemático, es útil para modelar funciones *afines*

El término de control es algo que afecta al estado[2], pero que no es necesario estimar porque es conocido.

[2] ...por lo que debe figurar en dicha ecuación!!

Solución

Etapa predictiva

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} = \mathbf{F}_{t-1}\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} + \mathbf{B}_t\mathbf{u}_t \quad \longleftarrow \text{ media predictiva}$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{Q}_{t-1} + \mathbf{F}_{t-1}\mathbf{P}_{t-1|t-1}\mathbf{F}_{t-1}^{H} \quad \longleftarrow \text{ covarianza predictiva}$$

asociadas a la fdp predictiva

Etapa de actualización

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{H}_t^H\left(\mathbf{H}_t\mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{H}_t^H + \mathbf{R}_t\right)^{-1} \quad \longleftarrow \text{ ganancia de Kalman}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t\left(\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}\right) \quad \longleftarrow \text{ media filtrada}$$

$$\mathbf{P}_{t|t} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t\right)\mathbf{P}_{t|t-1} \quad \longleftarrow \text{ covarianza filtrada}$$

asociadas a la fdp filtrada