Codificación de Canal

Introducción & códigos bloque

Manuel A. Vázquez
Jose Miguel Leiva
Joaquín Míguez

27 de febrero de 2024

Índice

Índice

Codificación (de canal)

Objetivo

Añadir redundancia a la información transmitida para ser capaces de recuperarla aún cuando se produzcan errores.

Codificación (de canal)

Objetivo

Añadir redundancia a la información transmitida para ser capaces de recuperarla aún cuando se produzcan errores.

Ejemplo: código de repetición

- $0 \rightarrow 000$
- $1 \rightarrow 111$

de manera que, e.g.,

$$010 \rightarrow 000\,111\,000$$

Codificación (de canal)

Objetivo

Añadir redundancia a la información transmitida para ser capaces de recuperarla aún cuando se produzcan errores.

Ejemplo: código de repetición

- $0 \to 000$
- $1 \to 111$

de manera que, e.g.,

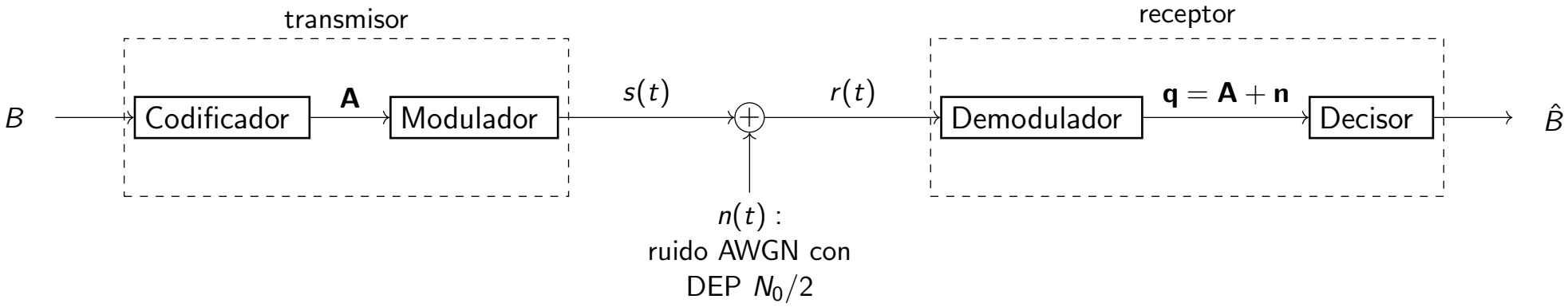
$$010 \to 000\,111\,000$$

¿Qué deberíamos *decidir* que se transmitió si recibimos

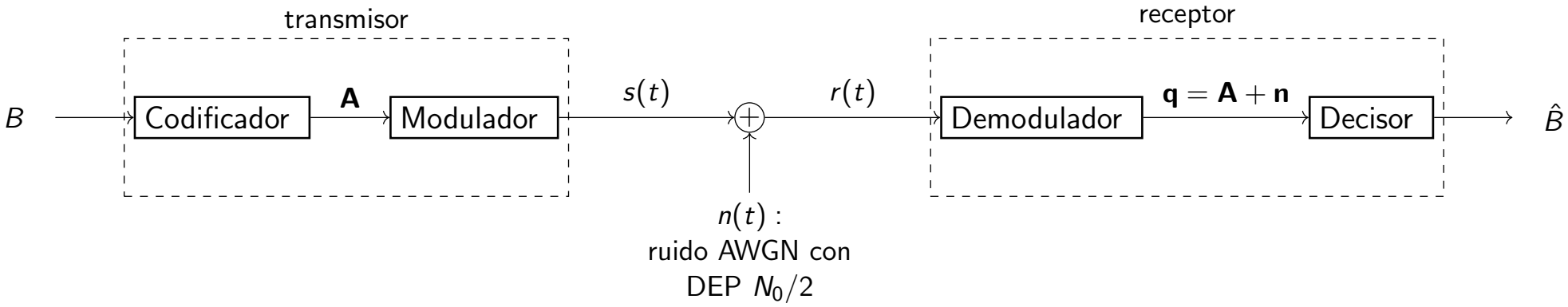
$$010\,100\,000\,?$$

¡000 (en lugar de 010)!

Sistema de Comunicaciones Digital

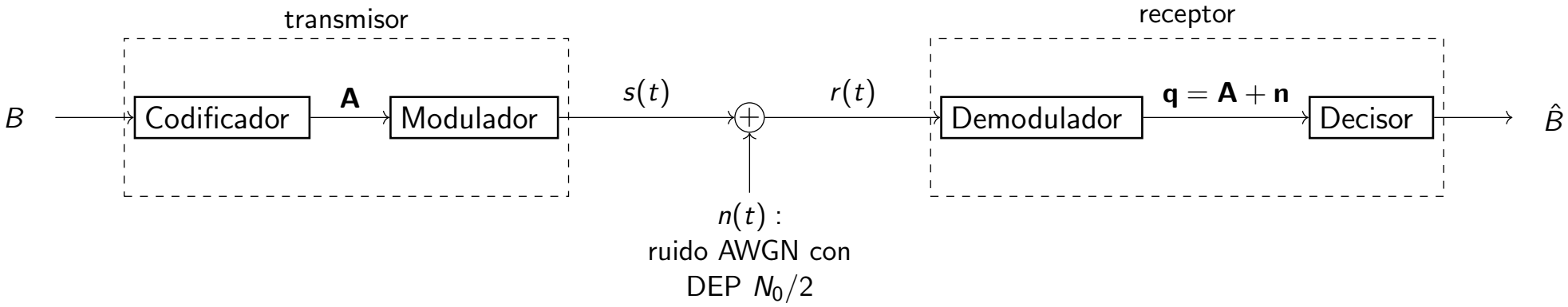


Sistema de Comunicaciones Digital



Se puede estudiar este modelo a diferentes niveles de abstracción...

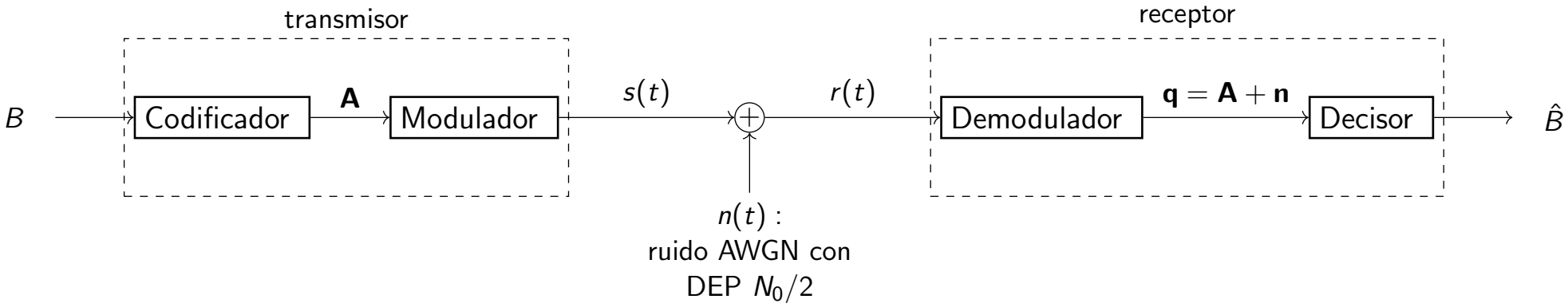
Sistema de Comunicaciones Digital



Se puede estudiar este modelo a diferentes niveles de abstracción...

- Canal digital

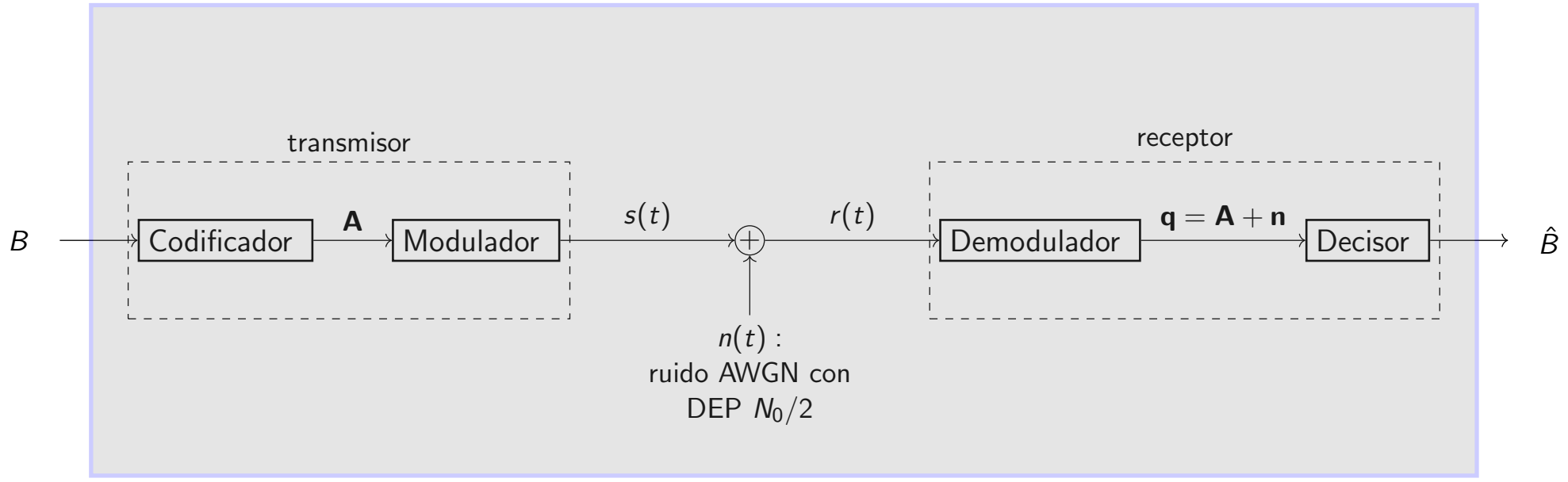
Sistema de Comunicaciones Digital



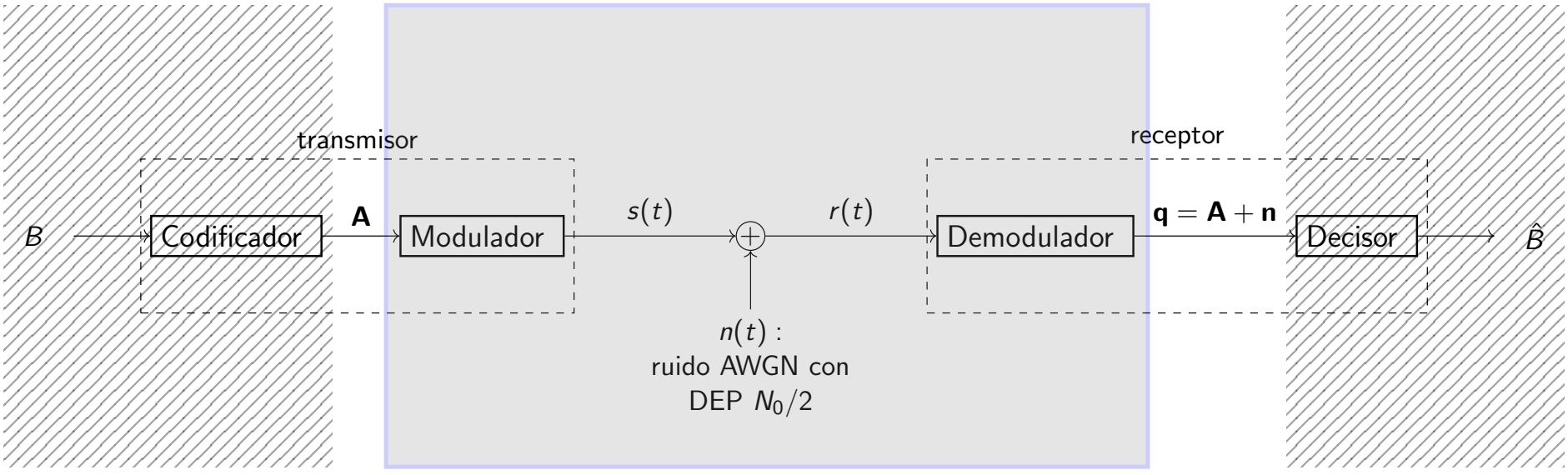
Se puede estudiar este modelo a diferentes niveles de abstracción...

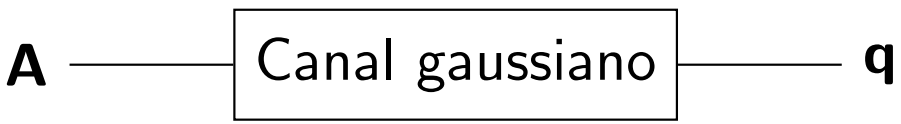
- Canal digital
- Canal gaussiano

Canal digital



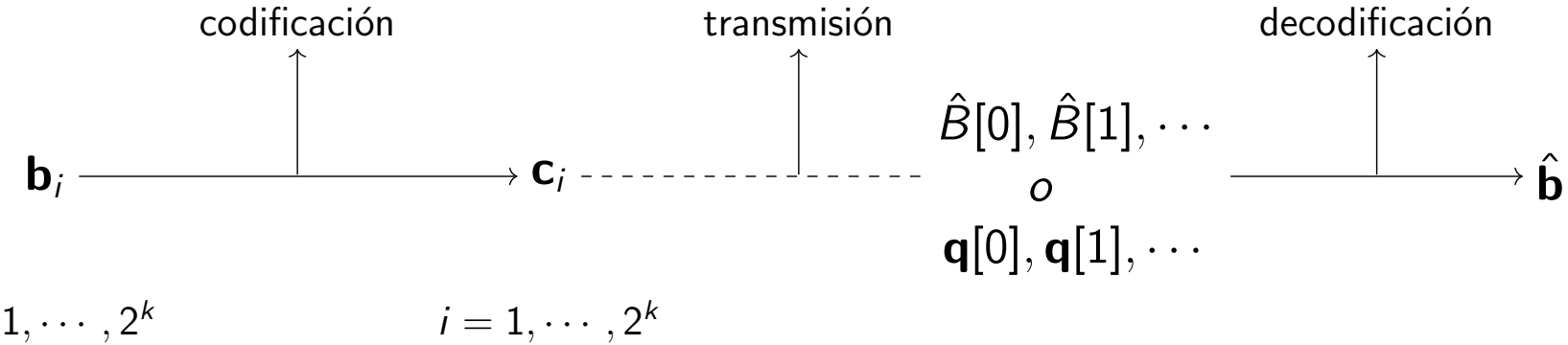
Canal Gaussiano (con entrada digital)





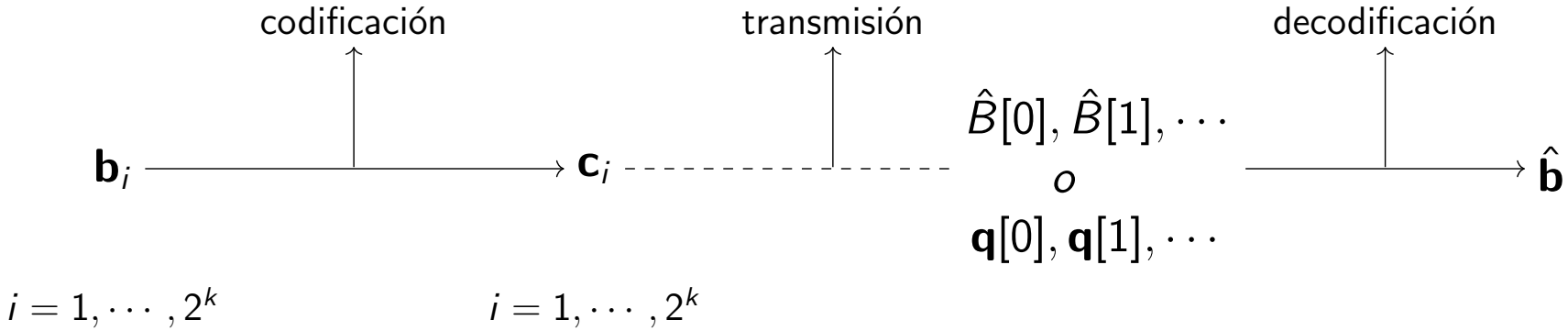
Algunos conceptos básicos

- **Código**
  Transformación de una secuencia de k bits, $\mathbf{b} \in \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots\}$, en otra de $n > k$ bits, $\mathbf{c} \in \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \cdots\}$.



Algunos conceptos básicos

- **Código**
  Transformación de una secuencia de k bits, $\mathbf{b} \in \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots\}$, en otra de $n > k$ bits, $\mathbf{c} \in \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \cdots\}$.



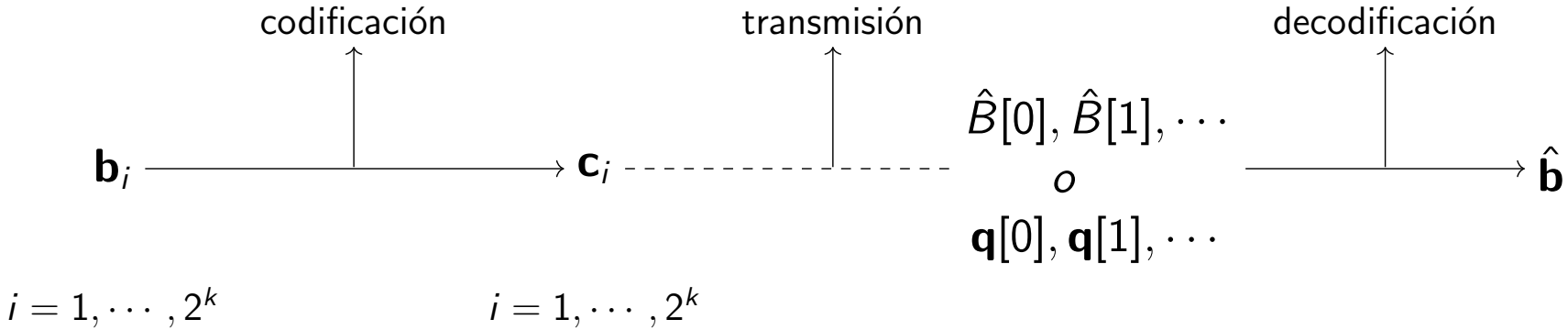
- **Probabilidad de error de $\mathbf{b}_i$**

$$P_e^i = Pr\{\hat{\mathbf{b}} \neq \mathbf{b}_i | \mathbf{b} = \mathbf{b}_i\},\ i = 1, \ldots, 2^k$$

- **Probabilidad de error máxima**: $P_e^{\text{máx}} = \text{máx}_i\, P_e^i$

Algunos conceptos básicos

- **Código**
  Transformación de una secuencia de k bits, $\mathbf{b} \in \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots\}$, en otra de $n > k$ bits, $\mathbf{c} \in \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \cdots\}$.



- **Probabilidad de error de $\mathbf{b}_i$**

$$P_e^i = Pr\{\hat{\mathbf{b}} \neq \mathbf{b}_i | \mathbf{b} = \mathbf{b}_i\}, \ i = 1, \ldots, 2^k$$

- **Probabilidad de error máxima**: $P_e^{\text{máx}} = \text{máx}_i \, P_e^i$
- **Tasa**: La tasa de un código define el número de bits de información k que transporta una palabra código de longitud n.

$$R = k/n$$

Probabilidad de error *de palabra código* vs. *de bit*

- P_e: probabilidad de error de palabra código

$$P_e = \frac{\#\text{ palabras código incorrectas recibidas}}{\#\text{ total de palabras código transmitidas}} = \frac{v}{w}$$

Probabilidad de error *de palabra código* vs. *de bit*

- P_e: probabilidad de error de palabra código

$$P_e = \frac{\#\text{ palabras código incorrectas recibidas}}{\#\text{ total de palabras código transmitidas}} = \frac{v}{w}$$

- *BER* (**B**it **E**rror **R**ate): probabilidad de error de bit

$$BER = \frac{\#\text{ bits incorrectos}}{\#\text{ bits transmitidos}}$$

(si cada palabra código transporta un único bit de información, coinciden)

Probabilidad de error *de palabra código* vs. *de bit*

- P_e: probabilidad de error de palabra código

$$P_e = \frac{\#\text{ palabras código incorrectas recibidas}}{\#\text{ total de palabras código transmitidas}} = \frac{v}{w}$$

- *BER* (**B**it **E**rror **R**ate): probabilidad de error de bit

$$BER = \frac{\#\text{ bits incorrectos}}{\#\text{ bits transmitidos}}$$

(si cada palabra código transporta un único bit de información, coinciden)

$$\text{peor caso} \rightarrow \quad BER = \frac{v \times k}{w \times k} = P_e$$

Probabilidad de error *de palabra código* vs. *de bit*

- P_e: probabilidad de error de palabra código

$$P_e = \frac{\#\text{ palabras código incorrectas recibidas}}{\#\text{ total de palabras código transmitidas}} = \frac{v}{w}$$

- *BER* (**B**it **E**rror **R**ate): probabilidad de error de bit

$$BER = \frac{\#\text{ bits incorrectos}}{\#\text{ bits transmitidos}}$$

(si cada palabra código transporta un único bit de información, coinciden)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{peor caso} \rightarrow & BER = \frac{v \times k}{w \times k} = P_e \\ \text{mejor caso} \rightarrow & BER = \frac{v \times 1}{w \times k} = \frac{P_e}{k} \end{array}\right\}$$

Probabilidad de error *de palabra código* vs. *de bit*

- P_e: probabilidad de error de palabra código

$$P_e = \frac{\#\text{ palabras código incorrectas recibidas}}{\#\text{ total de palabras código transmitidas}} = \frac{v}{w}$$

- *BER* (**B**it **E**rror **R**ate): probabilidad de error de bit

$$BER = \frac{\#\text{ bits incorrectos}}{\#\text{ bits transmitidos}}$$

(si cada palabra código transporta un único bit de información, coinciden)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{peor caso} \rightarrow & BER = \frac{v \times k}{w \times k} = P_e \\ \text{mejor caso} \rightarrow & BER = \frac{v \times 1}{w \times k} = \frac{P_e}{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P_e}{k} \leq BER \leq P_e$$

Teorema de Codificación

Teorema: Codificación de canal (Shannon, 1948)

Si C es la capacidad de un canal, es posible transmitir a tasa $R < C$ de forma fiable.

Teorema de Codificación

Teorema: Codificación de canal (Shannon, 1948)

Si C es la capacidad de un canal, es posible transmitir a tasa $R < C$ de forma fiable.

Capacidad

Es el máximo de la información mutua entre la entrada y la salida del canal.

Teorema de Codificación

Teorema: Codificación de canal (Shannon, 1948)

Si C es la capacidad de un canal, es posible transmitir a tasa $R < C$ de forma fiable.

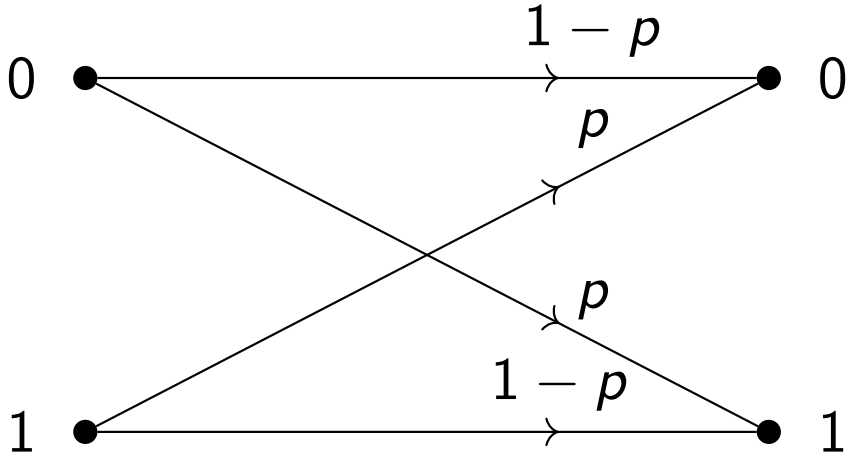
Capacidad

Es el máximo de la información mutua entre la entrada y la salida del canal.

Transmisión fiable

Existe una secuencia de códigos $(n, k) = (n, nR)$ *tal que, cuando* $n \to \infty$, $P_e^{\text{máx}} \to 0$.

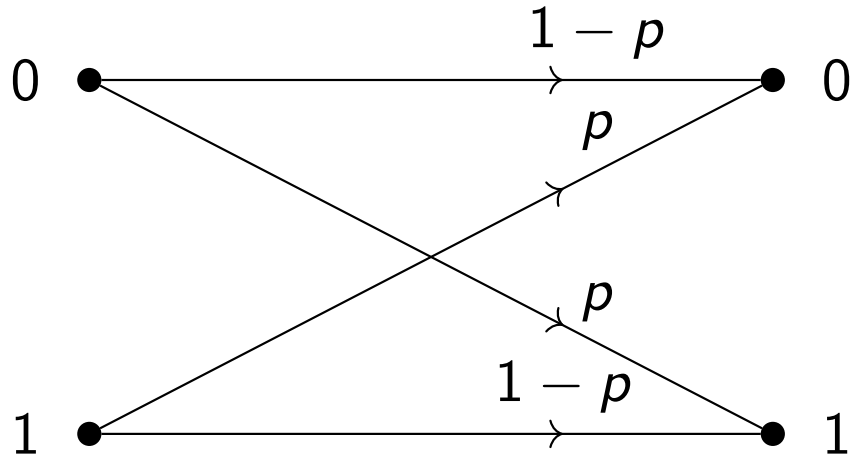
Teorema de codificación de canal: ejemplo



$$C = 1 - H_b(p),$$

siendo p la BER del canal y H_b la entropía binaria.

Teorema de codificación de canal: ejemplo



$$C = 1 - H_b(p),$$

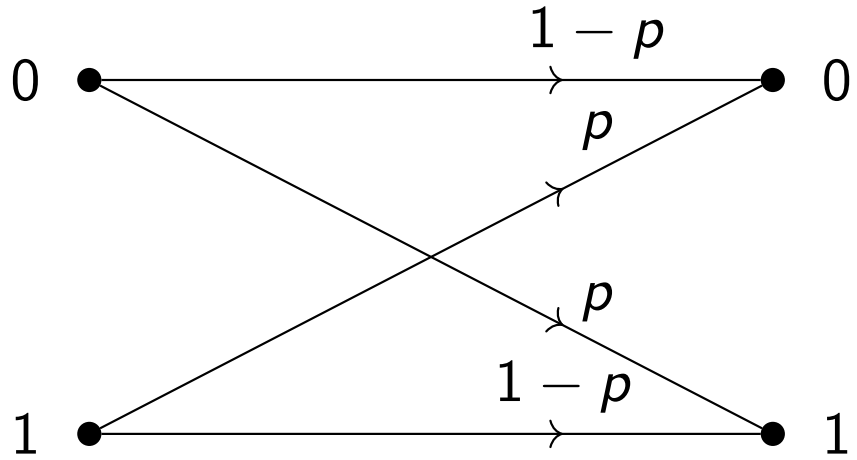
siendo p la BER del canal y H_b la entropía binaria.

Sean 4 canales binarios con

$$p = 0{,}15 \Rightarrow C_1 = 0{,}39 \qquad p = 0{,}13 \Rightarrow C_2 = 0{,}44$$
$$p = 0{,}17 \Rightarrow C_3 = 0{,}34 \qquad p = 0{,}19 \Rightarrow C_4 = 0{,}29$$

y un código de tasa $R = 1/3 = 0{,}33$.

Teorema de codificación de canal: ejemplo



$$C = 1 - H_b(p),$$

siendo p la BER del canal y H_b la entropía binaria.

Sean 4 canales binarios con

$$p = 0{,}15 \Rightarrow C_1 = 0{,}39 \qquad p = 0{,}13 \Rightarrow C_2 = 0{,}44$$
$$p = 0{,}17 \Rightarrow C_3 = 0{,}34 \qquad p = 0{,}19 \Rightarrow C_4 = 0{,}29$$

y un código de tasa $R = 1/3 = 0{,}33$.

Teorema de codificación de canal

Un código con R=1/3 solo respeta el límite de Shannon en los tres primeros casos.

Teorema de codificación de canal: ejemplo

En la figura se muestra como evoluciona la proabilidad de error de palabra código con n (solo tiende a 0 cuando $R < C$).

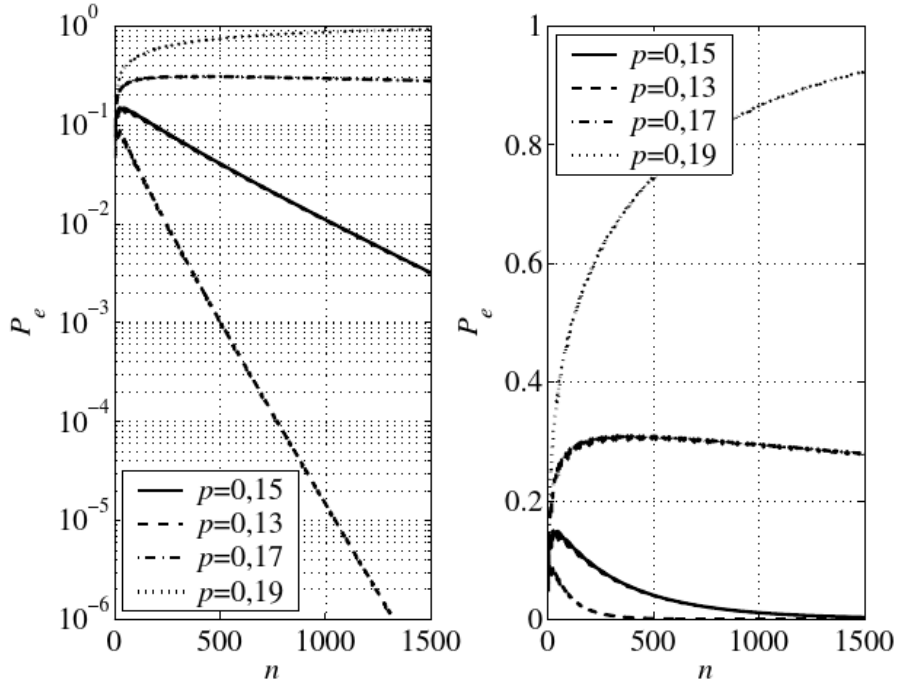


Figura: Izquierda: escala logarítmica; derecha: escala lineal

Definiciones

Definición: Redundancia

El número de bits, $r = n - k$, añadidos por el codificador.

Permite expresar la tasa del código como $R = \frac{k}{n} = \frac{n-r}{n} = 1 - \frac{r}{n}$

Definiciones

Definición: Redundancia

El número de bits, $r = n - k$, añadidos por el codificador.

Permite expresar la tasa del código como $R = \frac{k}{n} = \frac{n-r}{n} = 1 - \frac{r}{n}$

Definición: Distancia de Hamming...

...entre dos secuencias binarias es el número de bits en los que difieren.

Proporciona una medida de cómo de diferentes son dos secuencias de bits. Por ejemplo, $d_H(1010, 1001) = 2$.

Definiciones

Definición: Redundancia

El número de bits, $r = n - k$, añadidos por el codificador.

Permite expresar la tasa del código como $R = \frac{k}{n} = \frac{n-r}{n} = 1 - \frac{r}{n}$

Definición: Distancia de Hamming...

...entre dos secuencias binarias es el número de bits en los que difieren.

Proporciona una medida de cómo de diferentes son dos secuencias de bits. Por ejemplo, $d_H(1010, 1001) = 2$.

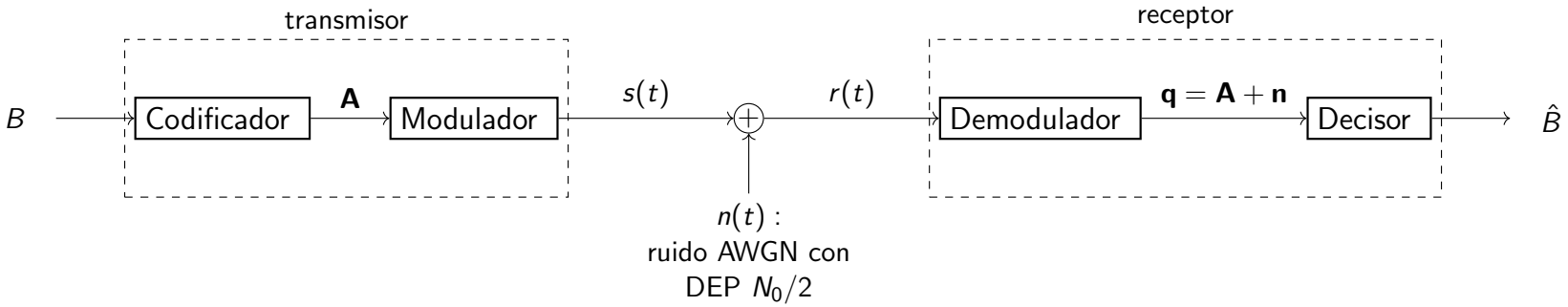
Definición: Distancia mínima de un código

$$d_{min} = \min_{i \neq j} d_H(\mathbf{c_i}, \mathbf{c_j})$$

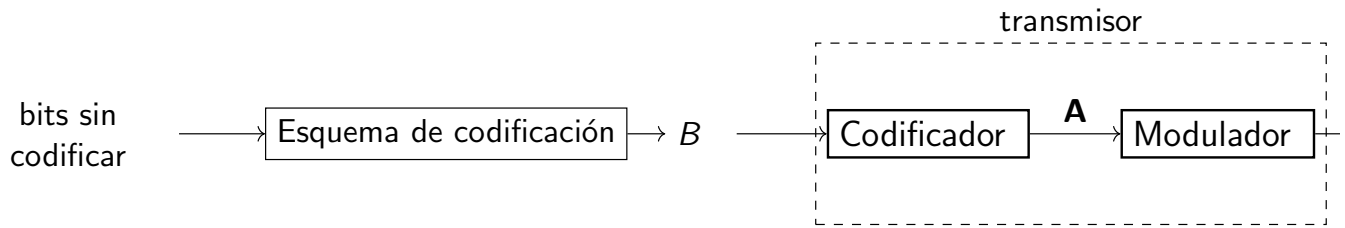
Índice

Codificación

En el modelo habitual de un sistema de comunicaciones digital,



el esquema de codificación se coloca *antes* del sistema



y tenemos

$$\left.\begin{array}{rl} B[0] = & C[0] \\ B[1] = & C[1] \\ \vdots & \vdots \end{array}\right\} \text{palabra código}$$

Índice

Decodificación dura

- Decodificación a *nivel de bit*

Decodificación dura

- Decodificación a *nivel de bit*
- Se basa en el canal digital

Decodificación dura

- Decodificación a *nivel de bit*
- Se basa en el canal digital

- La entrada al decodificador son los bits que salen del Detector, los $\hat{B}$'s.

Decodificación dura

- Decodificación a *nivel de bit*
- Se basa en el canal digital

- La entrada al decodificador son los bits que salen del Detector, los $\hat{B}$'s.
- La métrica utilizada es la **distancia de Hamming**.

Decodificación dura

- Decodificación a *nivel de bit*
- Se basa en el canal digital

- La entrada al decodificador son los bits que salen del Detector, los $\hat{B}$'s.
- La métrica utilizada es la **distancia de Hamming**.

Notación

$$\mathbf{c}_i = \left[C^i[0], C^i[1], \cdots C^i[n-1]\right] \equiv i\text{-ésima palabra código}$$

$$\mathbf{r} = \left[\hat{B}[0], \hat{B}[1], \cdots \hat{B}[n-1]\right] \equiv \text{palabra recibida}$$

Decodificación dura: criterio de decisión

- Criterio *Máximo a Posteriori* (MAP): decidir $\mathbf{c}_i$ si

$$p(\mathbf{c}_i|\mathbf{r}) > p(\mathbf{c}_j|\mathbf{r}) \qquad \forall j \neq i$$

Decodificación dura: criterio de decisión

- Criterio *Máximo a Posteriori* (MAP): decidir $\mathbf{c}_i$ si

$$p(\mathbf{c}_i|\mathbf{r}) > p(\mathbf{c}_j|\mathbf{r}) \qquad \forall j \neq i$$

- Si las palabras código son equiprobables, entonces es equivalente a Máxima Verosimilitud (ML),

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{c}_i) > p(\mathbf{r}|\mathbf{c}_j) \qquad \forall j \neq i$$

Decodificación dura: criterio de decisión

- Criterio *Máximo a Posteriori* (MAP): decidir $\mathbf{c}_i$ si

$$p(\mathbf{c}_i|\mathbf{r}) > p(\mathbf{c}_j|\mathbf{r}) \qquad \forall j \neq i$$

- Si las palabras código son equiprobables, entonces es equivalente a Máxima Verosimilitud (ML),

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{c}_i) > p(\mathbf{r}|\mathbf{c}_j) \qquad \forall j \neq i$$

  - Las verosimilitudes se pueden expresar en función de d_H

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{c}_i) = \epsilon^{d_H(\mathbf{r},\mathbf{c}_i)}(1-\epsilon)^{n-d_H(\mathbf{r},\mathbf{c}_i)}$$

$\epsilon \equiv$ probabilidad de error de bit *del canal*

Decodificación dura: criterio de decisión

- Criterio *Máximo a Posteriori* (MAP): decidir $\mathbf{c}_i$ si

$$p(\mathbf{c}_i|\mathbf{r}) > p(\mathbf{c}_j|\mathbf{r}) \qquad \forall j \neq i$$

- Si las palabras código son equiprobables, entonces es equivalente a Máxima Verosimilitud (ML),

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{c}_i) > p(\mathbf{r}|\mathbf{c}_j) \qquad \forall j \neq i$$

  - Las verosimilitudes se pueden expresar en función de d_H

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{c}_i) = \epsilon^{d_H(\mathbf{r},\mathbf{c}_i)}(1-\epsilon)^{n-d_H(\mathbf{r},\mathbf{c}_i)}$$

$\epsilon \equiv$ probabilidad de error de bit *del canal*

- Si $\epsilon < 0{,}5$ ML equivale a decidir $\mathbf{c}_i$ si

$$d_H(\mathbf{r},\mathbf{c}_i) < d_H(\mathbf{r},\mathbf{c}_j) \qquad \forall j \neq i.$$

Decodificación dura: detección vs. corrección de errores

Suponiendo que ocurrieron errores durante la transmisión, hay dos escenarios posibles:

Decodificación dura: detección vs. corrección de errores

Suponiendo que ocurrieron errores durante la transmisión, hay dos escenarios posibles:

- **No** lo detectamos

Decodificación dura: detección vs. corrección de errores

Suponiendo que ocurrieron errores durante la transmisión, hay dos escenarios posibles:

- **No** lo detectamos
  (solo detectamos errores si $\mathbf{r} \neq \mathbf{c}_i \quad i = 1, \ldots, 2^k$)

Decodificación dura: detección vs. corrección de errores

Suponiendo que ocurrieron errores durante la transmisión, hay dos escenarios posibles:

- **No** lo detectamos
  (solo detectamos errores si $\mathbf{r} \neq \mathbf{c}_i \quad i = 1, \ldots, 2^k$)
- Lo detectamos, y tenemos que tomar una decisión:

Decodificación dura: detección vs. corrección de errores

Suponiendo que ocurrieron errores durante la transmisión, hay dos escenarios posibles:

- **No** lo detectamos
  (solo detectamos errores si $\mathbf{r} \neq \mathbf{c}_i \quad i = 1, \ldots, 2^k$)
- Lo detectamos, y tenemos que tomar una decisión:
  - No nos arriesgamos a corregirlos y solicitamos la *retransmisión*
    (**no** podemos corregir *con confianza*)

Decodificación dura: detección vs. corrección de errores

Suponiendo que ocurrieron errores durante la transmisión, hay dos escenarios posibles:

- **No** lo detectamos
  (solo detectamos errores si $\mathbf{r} \neq \mathbf{c}_i \quad i = 1, \ldots, 2^k$)
- Lo detectamos, y tenemos que tomar una decisión:
  - No nos arriesgamos a corregirlos y solicitamos la *retransmisión*
    (**no** podemos corregir *con confianza*)
  - *intentamos* corregirlos
    (¡¡implica un riesgo!!)

Decodificación dura: detección vs. corrección de errores

Suponiendo que ocurrieron errores durante la transmisión, hay dos escenarios posibles:

- **No** lo detectamos
  (solo detectamos errores si $\mathbf{r} \neq \mathbf{c}_i \quad i = 1, \ldots, 2^k$)
- Lo detectamos, y tenemos que tomar una decisión:
  - No nos arriesgamos a corregirlos y solicitamos la *retransmisión*
    (**no** podemos corregir *con confianza*)
  - *intentamos* corregirlos
    (¡¡implica un riesgo!!)

En este último escenario necesitamos una *política*: en este curso **siempre** intentamos corregir los errores.

Decodificación dura: detección

- Detectamos un error de palabra código cuando se producen **menos de** d_{min} errores de bit.

Decodificación dura: detección

- Detectamos un error de palabra código cuando se producen **menos de** d_{min} errores de bit.
- Probabilidad de no detectar que ha ocurrido algún error (se tienen que dar d_{min} errores)

$$P_{nd} \leq \sum_{m=d_{min}}^{n} \binom{n}{m} \epsilon^m (1-\epsilon)^{n-m}$$

donde ϵ es la probabilidad de error de bit en el sistema, y d_{min} es la mínima distancia entre palabras código.

Decodificación dura: detección

- Detectamos un error de palabra código cuando se producen **menos de** d_{min} errores de bit.
- Probabilidad de no detectar que ha ocurrido algún error (se tienen que dar d_{min} errores)

$$P_{nd} \leq \sum_{m=d_{min}}^{n} \binom{n}{m} \epsilon^m (1-\epsilon)^{n-m}$$

donde ϵ es la probabilidad de error de bit en el sistema, y d_{min} es la mínima distancia entre palabras código.

Una cota de la probabilidad de error...

...porque hay casos en los que d_{min} errores no hacen que una palabra código se convierta en otra $\Rightarrow \leq$ en lugar de $=$

Decodificación dura: corrección (*siempre* corregimos)

- Se decodifica correctamente si hay menos de $d_{min}/2$ bits erróneos $\Rightarrow$ el código puede corregir **hasta**

$$t = \lfloor (d_{min} - 1)/2 \rfloor \text{ errores.}$$

Decodificación dura: corrección (*siempre* corregimos)

- Se decodifica correctamente si hay menos de $d_{min}/2$ bits erróneos $\Rightarrow$ el código puede corregir **hasta**

$$t = \lfloor (d_{min} - 1)/2 \rfloor \text{ errores.}$$

- Probabilidad de error de corrección:

$$P_e \leq \sum_{m=t+1}^{n} \binom{n}{m} \epsilon^m (1-\epsilon)^{n-m}$$

Decodificación dura: corrección (*siempre* corregimos)

- Se decodifica correctamente si hay menos de $d_{min}/2$ bits erróneos $\Rightarrow$ el código puede corregir **hasta**

$$t = \lfloor (d_{min} - 1)/2 \rfloor \text{ errores.}$$

- Probabilidad de error de corrección:

$$P_e \leq \sum_{m=t+1}^{n} \binom{n}{m} \epsilon^m (1-\epsilon)^{n-m}$$

Una cota de la probabilidad de error...

...puesto que podríamos corregir bien más de t errores (simplemente no está garantizado) $\Rightarrow \leq$ en lugar de $=$

Decodificación dura: corrección (*siempre* corregimos)

- Se decodifica correctamente si hay menos de $d_{min}/2$ bits erróneos $\Rightarrow$ el código puede corregir **hasta**

$$t = \lfloor (d_{min} - 1)/2 \rfloor \text{ errores.}$$

- Probabilidad de error de corrección:

$$P_e \leq \sum_{m=t+1}^{n} \binom{n}{m} \epsilon^m (1-\epsilon)^{n-m}$$

Una cota de la probabilidad de error...

...puesto que podríamos corregir bien más de t errores (simplemente no está garantizado) $\Rightarrow \leq$ en lugar de $=$

Cota aproximada

El primer elemento del sumatorio aproxima bien el error si ϵ es pequeño y d_{min} grande.

Decodificación blanda

- Decodificación a *nivel de elemento de la constelación*

Decodificación blanda

- Decodificación a *nivel de elemento de la constelación*
- Se basa en el canal gaussiano

con

$$\mathbf{q} = \mathbf{A} + \mathbf{n}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector de ruido gaussiano.

Decodificación blanda

- Decodificación a *nivel de elemento de la constelación*
- Se basa en el canal gaussiano

con

$$\mathbf{q} = \mathbf{A} + \mathbf{n}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector de ruido gaussiano.

- La entrada al decodificador son los observaciones que salen del Demodulador, los $\mathbf{q}$'s.

Decodificación blanda

- Decodificación a *nivel de elemento de la constelación*
- Se basa en el canal gaussiano

con

$$\mathbf{q} = \mathbf{A} + \mathbf{n}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector de ruido gaussiano.

- La entrada al decodificador son los observaciones que salen del Demodulador, los $\mathbf{q}$'s.
- La métrica utilizada es la **distancia euclídea**

Decodificación blanda

- Decodificación a *nivel de elemento de la constelación*
- Se basa en el canal gaussiano

con

$$\mathbf{q} = \mathbf{A} + \mathbf{n}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector de ruido gaussiano.

- La entrada al decodificador son los observaciones que salen del Demodulador, los $\mathbf{q}$'s.
- La métrica utilizada es la **distancia euclídea**

Notación

$m \equiv \#$ bits transportados por cada $\mathbf{A}$

$\tilde{\mathbf{c}}_i = \left[\mathbf{A}^{(i)}[0], \mathbf{A}^{(i)}[1], \cdots \mathbf{A}^{(i)}[n/m-1]\right] \equiv i$-ésima pal. cód.

$\tilde{\mathbf{r}} = [\mathbf{q}[0], \mathbf{q}[1], \cdots \mathbf{q}[n/m-1]] \equiv$ palabra recibida

Decodificación blanda: corrección

- La probabilidad de error *de palabra código* se puede aproximar por

$$P_e \approx \kappa \mathrm{Q}\left(\frac{d_{min}/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) \tag{1}$$

donde κ es el *kiss number*.

Definición: kiss number

Es el máximo número de palabras código que están a una distancia d_{min} de una dada.

Ganancia de codificación

- Si igualamos la *BER* con y sin codificación, la **ganancia de codificación** se obtiene como

$$G = \frac{(E_b/N_0)_{sc}}{(E_b/N_0)_c}$$

Ganancia de codificación

- Si igualamos la *BER* con y sin codificación, la **ganancia de codificación** se obtiene como

$$G = \frac{(E_b/N_0)_{sc}}{(E_b/N_0)_c}$$

- Hay que distinguir entre la obtenida con decodificación dura y blanda.

Ganancia de codificación

- Si igualamos la *BER* con y sin codificación, la **ganancia de codificación** se obtiene como

$$G = \frac{(E_b/N_0)_{sc}}{(E_b/N_0)_c}$$

- Hay que distinguir entre la obtenida con decodificación dura y blanda.

Para calcular las E_b/N_0's individuales, a menudo es útil...

Regla de Stirling

$$Q(x) \approx \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ganancia de codificación: ejemplo

Sea una constelación binaria antipodal 2-PAM ($\pm\sqrt{E_s}$), y el código

$\mathbf{b}_i$	$\mathbf{c}_i$
00	000
01	011
10	110
11	101

Ganancia de codificación: ejemplo - decodificación dura

- Este código no corrige errores puesto que $t = \lfloor (d_{min} - 1)/2 \rfloor = 0$, y la probabilidad de error de palabra código es

$$P_e \leq \sum_{m=1}^{3} \binom{3}{m} \epsilon^m (1-\epsilon)^{n-m} \approx 3\epsilon$$

donde $\epsilon = Q(\sqrt{2E_s/N_0})$.

Ganancia de codificación: ejemplo - decodificación dura

- Este código no corrige errores puesto que $t = \lfloor (d_{min} - 1)/2 \rfloor = 0$, y la probabilidad de error de palabra código es

$$P_e \leq \sum_{m=1}^{3} \binom{3}{m} \epsilon^m (1-\epsilon)^{n-m} \approx 3\epsilon$$

  donde $\epsilon = Q(\sqrt{2E_s/N_0})$.
- Probabilidad de error de bit

$$BER \approx \frac{2}{3} 3Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

Ganancia de codificación: ejemplo - decodificación dura

- Este código no corrige errores puesto que $t = \lfloor (d_{min} - 1)/2 \rfloor = 0$, y la probabilidad de error de palabra código es

$$P_e \leq \sum_{m=1}^{3} \binom{3}{m} \epsilon^m (1-\epsilon)^{n-m} \approx 3\epsilon$$

  donde $\epsilon = Q(\sqrt{2E_s/N_0})$.
- Probabilidad de error de bit

$$BER \approx \frac{2}{3} 3Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

- Y para expresarlo en términos de E_b, tenemos en cuenta $2E_b = 3E_s$, quedando

$$BER \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{3N_0}}\right)$$

Ganancia de codificación: ejemplo - decodificación blanda

- Decidimos **b** a partir de la salida del canal gausiano,

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}[0], \mathbf{q}[1], \mathbf{q}[2]) = (\mathbf{A}[0] + \mathbf{n}[0], \mathbf{A}[1] + \mathbf{n}[1], \mathbf{A}[2] + \mathbf{n}[2])$$

Ganancia de codificación: ejemplo - decodificación blanda

- Decidimos **b** a partir de la salida del canal gausiano,

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}[0], \mathbf{q}[1], \mathbf{q}[2]) = (\mathbf{A}[0] + \mathbf{n}[0], \mathbf{A}[1] + \mathbf{n}[1], \mathbf{A}[2] + \mathbf{n}[2])$$

- Equivalente al decisor para la constelación

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{E_s} \\ -\sqrt{E_s} \\ -\sqrt{E_s} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{E_s} \\ \sqrt{E_s} \\ \sqrt{E_s} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \\ \sqrt{E_s} \\ -\sqrt{E_s} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \\ -\sqrt{E_s} \\ \sqrt{E_s} \end{pmatrix}$$

que tiene distancia (euclídea) mínima $d_{min} = 2\sqrt{2E_s}$

Ganancia de codificación: ejemplo - decodificación blanda

- Decidimos **b** a partir de la salida del canal gausiano,

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}[0], \mathbf{q}[1], \mathbf{q}[2]) = (\mathbf{A}[0] + \mathbf{n}[0], \mathbf{A}[1] + \mathbf{n}[1], \mathbf{A}[2] + \mathbf{n}[2])$$

- Equivalente al decisor para la constelación

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{E_s} \\ -\sqrt{E_s} \\ -\sqrt{E_s} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{E_s} \\ \sqrt{E_s} \\ \sqrt{E_s} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \\ \sqrt{E_s} \\ -\sqrt{E_s} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \\ -\sqrt{E_s} \\ \sqrt{E_s} \end{pmatrix}$$

  que tiene distancia (euclídea) mínima $d_{min} = 2\sqrt{2E_s}$
- Utilizando (1) la probilidad de error de palabra código es

$$P_e \approx 3Q\left(\sqrt{\frac{4E_s}{N_0}}\right)$$

Ganancia de codificación: ejemplo - decodificación blanda

- Decidimos $\mathbf{b}$ a partir de la salida del canal gausiano,

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}[0], \mathbf{q}[1], \mathbf{q}[2]) = (\mathbf{A}[0] + \mathbf{n}[0], \mathbf{A}[1] + \mathbf{n}[1], \mathbf{A}[2] + \mathbf{n}[2])$$

- Equivalente al decisor para la constelación

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{E_s} \\ -\sqrt{E_s} \\ -\sqrt{E_s} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{E_s} \\ \sqrt{E_s} \\ \sqrt{E_s} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \\ \sqrt{E_s} \\ -\sqrt{E_s} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \\ -\sqrt{E_s} \\ \sqrt{E_s} \end{pmatrix}$$

  que tiene distancia (euclídea) mínima $d_{min} = 2\sqrt{2E_s}$
- Utilizando (1) la probilidad de error de palabra código es

$$P_e \approx 3Q\left(\sqrt{\frac{4E_s}{N_0}}\right)$$

- BER en función de E_b:

$$BER \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{8E_b}{3N_0}}\right)$$

Ganancia de codificación: ejemplo - decodificación dura vs. blanda

- Sin codificar, tenemos que $E_b = E_s$ y

$$\mathrm{BER}_{sc} = \epsilon = Q\left(\sqrt{2E_b/N_0}\right)$$

Ganancia de codificación: ejemplo - decodificación dura vs. blanda

- Sin codificar, tenemos que $E_b = E_s$ y

$$\mathrm{BER}_{sc} = \epsilon = Q\left(\sqrt{2E_b/N_0}\right)$$

- Ganancia con decodificación dura
  - Igualamos BER_c y BER_{sc}
  - Aproximación: igualamos solo los argumentos de $Q(\cdot)$

$$G = \frac{(E_b/N_0)_{sc}}{(E_b/N_0)_c} = 2/3 \approx -1{,}76dB$$

  - ¡Hemos perdido codificando! (lógico, dado que el código no corrige errores)

Ganancia de codificación: ejemplo - decodificación dura vs. blanda

- Sin codificar, tenemos que $E_b = E_s$ y

$$\mathrm{BER}_{sc} = \epsilon = Q\left(\sqrt{2E_b/N_0}\right)$$

- Ganancia con decodificación dura
  - Igualamos BER_c y BER_{sc}
  - Aproximación: igualamos solo los argumentos de $Q(\cdot)$

$$G = \frac{(E_b/N_0)_{sc}}{(E_b/N_0)_c} = 2/3 \approx -1{,}76dB$$

  - ¡Hemos perdido codificando! (lógico, dado que el código no corrige errores)
- Decodificación blanda

$$G = 4/3 \approx 1{,}25dB$$

  - Ahora sí sacamos partido a la codificación

Índice

Códigos bloque lineales

Campo de Galois módulo 2 ($GF(2)$)

$$a + b = (a + b)_2$$

$$a \cdot b = (a \cdot b)_2$$

Códigos bloque lineales

Campo de Galois módulo 2 ($GF(2)$)

$$a + b = (a + b)_2$$
$$a \cdot b = (a \cdot b)_2$$

Definición: Código bloque lineal

Un código bloque lineal es un código en el que cualquier combinación lineal de palabras código es también una palabra código.

Códigos bloque lineales

Campo de Galois módulo 2 ($GF(2)$)

$$a + b = (a + b)_2$$
$$a \cdot b = (a \cdot b)_2$$

Definición: Código bloque lineal

Un código bloque lineal es un código en el que cualquier combinación lineal de palabras código es también una palabra código.

Propiedades

- Es un subespacio de $GF(2)^n$ con 2^k elementos.

Códigos bloque lineales

Campo de Galois módulo 2 ($GF(2)$)

$$a + b = (a + b)_2$$
$$a \cdot b = (a \cdot b)_2$$

Definición: Código bloque lineal

Un código bloque lineal es un código en el que cualquier combinación lineal de palabras código es también una palabra código.

Propiedades

- Es un subespacio de $GF(2)^n$ con 2^k elementos.
- La palabra todo-ceros pertenece al código.

Códigos bloque lineales

Campo de Galois módulo 2 ($GF(2)$)

$$a + b = (a + b)_2$$
$$a \cdot b = (a \cdot b)_2$$

Definición: Código bloque lineal

Un código bloque lineal es un código en el que cualquier combinación lineal de palabras código es también una palabra código.

Propiedades

- Es un subespacio de $GF(2)^n$ con 2^k elementos.
- La palabra todo-ceros pertenece al código.
- Toda palabra tiene al menos otra a d_{min}.

Códigos bloque lineales

Campo de Galois módulo 2 ($GF(2)$)

$$a + b = (a + b)_2$$
$$a \cdot b = (a \cdot b)_2$$

Definición: Código bloque lineal

Un código bloque lineal es un código en el que cualquier combinación lineal de palabras código es también una palabra código.

Propiedades

- Es un subespacio de $GF(2)^n$ con 2^k elementos.
- La palabra todo-ceros pertenece al código.
- Toda palabra tiene al menos otra a d_{min}.
- d_{min} coincide con el menor peso (número de 1s) de las palabras no nulas.

Códigos bloque lineales: estructura

Elementos de un código lineal (n, k)

Códigos bloque lineales: estructura

Elementos de un código lineal (n, k)

- **b** es el mensaje, $[\blacksquare]_{1 \times k}$

Códigos bloque lineales: estructura

Elementos de un código lineal (n, k)

- $\mathbf{b}$ es el mensaje,  $1 \times k$
- $\mathbf{c}$ es la palabra código,  $1 \times n$

Códigos bloque lineales: estructura

Elementos de un código lineal (n, k)

- **b** es el mensaje,  $1 \times k$
- **c** es la palabra código,  $1 \times n$
- **r** es la palabra recibida,  $1 \times n$ con

$$\mathbf{r} = \mathbf{c} + \mathbf{e}$$

  - **e** es el ruido  $1 \times n$

Códigos bloque lineales: estructura

Elementos de un código lineal (n, k)

- **b** es el mensaje,  $1 \times k$
- **c** es la palabra código,  $1 \times n$
- **r** es la palabra recibida,  $1 \times n$ con

$$\mathbf{r} = \mathbf{c} + \mathbf{e}$$

  - **e** es el ruido  $1 \times n$
- **G** es la matriz **generadora**,

(para codificar)

 $k \times n$

Códigos bloque lineales: estructura

Elementos de un código lineal (n, k)

- **b** es el mensaje,  $1 \times k$
- **c** es la palabra código,  $1 \times n$
- **r** es la palabra recibida,  $1 \times n$ con

$$\mathbf{r} = \mathbf{c} + \mathbf{e}$$

  - **e** es el ruido  $1 \times n$
- **G** es la matriz **generadora**,

(para codificar)

 $k \times n$

- **H** es la matriz de **control (o chequeo) de paridad**,

(para decodificar)

 $n - k \times n$

Codificación

El *mapeo* $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}$ se hace multiplicando por una matriz i.e.,

$$\mathbf{c} = \mathbf{bG}.$$

Codificación

El *mapeo* $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}$ se hace multiplicando por una matriz i.e.,

$$\mathbf{c} = \mathbf{bG}.$$

Recordar:

- $\mathbf{b}$ es $1 \times k$
- $\mathbf{G}$ es $k \times n$
- $\mathbf{c}$ es $1 \times n$

Codificación

El *mapeo* $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}$ se hace multiplicando por una matriz i.e.,

$$\mathbf{c} = \mathbf{bG}.$$

Recordar:

- $\mathbf{b}$ es $1 \times k$
- $\mathbf{G}$ es $k \times n$
- $\mathbf{c}$ es $1 \times n$

Propiedad

Cada fila de $\mathbf{G}$ es una palabra código.

Matriz de control de paridad

La matriz de control de paridad, $\mathbf{H}$, es el *complemento ortogonal* de $\mathbf{G}$, de manera que

$$\mathbf{c}\mathbf{H}^\top = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{c} \text{ is a codeword}$$

Matriz de control de paridad

La matriz de control de paridad, $\mathbf{H}$, es el *complemento ortogonal* de $\mathbf{G}$, de manera que

$$\mathbf{c}\mathbf{H}^\top = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{c} \text{ is a codeword}$$

Por conveniencia,

Definición: Síndrome

El síndrome de la secuencia recibida $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}\mathbf{H}^\top \quad (\text{de dimensiones } 1 \times (n-k))$$

Entonces,

$$\mathbf{s} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{r} \text{ es una palabra código.}$$

Matriz de control de paridad

La matriz de control de paridad, $\mathbf{H}$, es el *complemento ortogonal* de $\mathbf{G}$, de manera que

$$\mathbf{cH}^\top = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{c} \text{ is a codeword}$$

Por conveniencia,

Definición: Síndrome

El síndrome de la secuencia recibida $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{s} = \mathbf{rH}^\top \quad (\text{de dimensiones } 1 \times (n-k))$$

Entonces,

$$\mathbf{s} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{r} \text{ es una palabra código.}$$

Relación entre el síndrome y el error

$$\mathbf{s} = \mathbf{rH}^T = (\mathbf{c}+\mathbf{e})\mathbf{H}^T = \cancelto{0}{\mathbf{cH}^T} + \mathbf{eH}^T = \mathbf{eH}^T$$

Decodificación dura: decodificación por síndrome

El criterio de mínima distancia exige calcular la d_H entre la palabra recibida, $\mathbf{r}$, y todas las palabras código...pero podemos hacer decodificación por *síndrome*.

Decodificación dura: decodificación por síndrome

El criterio de mínima distancia exige calcular la d_H entre la palabra recibida, $\mathbf{r}$, y todas las palabras código...pero podemos hacer decodificación por *síndrome*.

De antemano:

Construir una tabla con el síndrome asociado a cada posible error,

error ($\mathbf{e}$)	síndrome($\mathbf{s}$)
⋮	⋮

(Si varios errores dan lugar al mismo síndrome, se elige el más verosímil, i.e., el de menor peso)

Decodificación dura: decodificación por síndrome

El criterio de mínima distancia exige calcular la d_H entre la palabra recibida, $\mathbf{r}$, y todas las palabras código...pero podemos hacer decodificación por *síndrome*.

De antemano:

Construir una tabla con el síndrome asociado a cada posible error,

error ($\mathbf{e}$)	síndrome($\mathbf{s}$)
⋮	⋮

(Si varios errores dan lugar al mismo síndrome, se elige el más verosímil, i.e., el de menor peso)

En operación: dada la palabra recibida, $\mathbf{r}$:

Decodificación dura: decodificación por síndrome

El criterio de mínima distancia exige calcular la d_H entre la palabra recibida, $\mathbf{r}$, y todas las palabras código...pero podemos hacer decodificación por *síndrome*.

De antemano:

Construir una tabla con el síndrome asociado a cada posible error,

error ($\mathbf{e}$)	síndrome($\mathbf{s}$)
⋮	⋮

(Si varios errores dan lugar al mismo síndrome, se elige el más verosímil, i.e., el de menor peso)

En operación: dada la palabra recibida, $\mathbf{r}$:

1. Obtener síndrome $\mathbf{s} = \mathbf{r}\mathbf{H}^T$.

Decodificación dura: decodificación por síndrome

El criterio de mínima distancia exige calcular la d_H entre la palabra recibida, $\mathbf{r}$, y todas las palabras código...pero podemos hacer decodificación por *síndrome*.

De antemano:

Construir una tabla con el síndrome asociado a cada posible error,

error ($\mathbf{e}$)	síndrome($\mathbf{s}$)
⋮	⋮

(Si varios errores dan lugar al mismo síndrome, se elige el más verosímil, i.e., el de menor peso)

En operación: dada la palabra recibida, $\mathbf{r}$:

1. Obtener síndrome $\mathbf{s} = \mathbf{r}\mathbf{H}^T$.
2. Buscar en la tabla el patrón de error, $\mathbf{e}$, con ese síndrome

Decodificación dura: decodificación por síndrome

El criterio de mínima distancia exige calcular la d_H entre la palabra recibida, $\mathbf{r}$, y todas las palabras código...pero podemos hacer decodificación por *síndrome*.

De antemano:

Construir una tabla con el síndrome asociado a cada posible error,

error ($\mathbf{e}$)	síndrome($\mathbf{s}$)
⋮	⋮

(Si varios errores dan lugar al mismo síndrome, se elige el más verosímil, i.e., el de menor peso)

En operación: dada la palabra recibida, $\mathbf{r}$:

1. Obtener síndrome $\mathbf{s} = \mathbf{r}\mathbf{H}^T$.
2. Buscar en la tabla el patrón de error, $\mathbf{e}$, con ese síndrome
3. *Deshacer* el error

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{r} + \mathbf{e}$$

Códigos sistemáticos

Definición: Código sistemático

Un código en el que el mensaje siempre aparece en la secuencia codificada (en el mismo sitio).

Códigos sistemáticos

Definición: Código sistemático

Un código en el que el mensaje siempre aparece en la secuencia codificada (en el mismo sitio).

Se puede forzar esto a través de la matriz generadora,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{P} \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{I}_k \end{bmatrix}$$

Códigos sistemáticos

Definición: Código sistemático

Un código en el que el mensaje siempre aparece en la secuencia codificada (en el mismo sitio).

Se puede forzar esto a través de la matriz generadora,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{P} \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{I}_k \end{bmatrix}$$

- Los k primeros/últimos bits en $\mathbf{c}$ son iguales a $\mathbf{b}$ y los $n-k$ restantes son de redundancia.

Códigos sistemáticos

Definición: Código sistemático

Un código en el que el mensaje siempre aparece en la secuencia codificada (en el mismo sitio).

Se puede forzar esto a través de la matriz generadora,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{P} \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{I}_k \end{bmatrix}$$

- Los k primeros/últimos bits en $\mathbf{c}$ son iguales a $\mathbf{b}$ y los $n-k$ restantes son de redundancia.
- Si $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{P} \end{bmatrix}$ se puede demostrar

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T & \mathbf{I}_{n-k} \end{bmatrix}$$

Ejercicio

Demuéstralo!!

Ejemplo de código sistemático: Hamming $(7, 4)$

Matriz Generadora:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de control de paridad:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de código sistemático: Hamming $(7, 4)$

Matriz Generadora:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de control de paridad:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cualquier código de Hamming:

Ejemplo de código sistemático: Hamming $(7, 4)$

Matriz Generadora:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de control de paridad:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cualquier código de Hamming:

- Es *perfecto*

Ejemplo de código sistemático: Hamming $(7, 4)$

Matriz Generadora:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de control de paridad:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cualquier código de Hamming:

- Es *perfecto*
- $d_{min} = 3$

Ejemplo de código sistemático: Hamming $(7, 4)$

Matriz Generadora:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

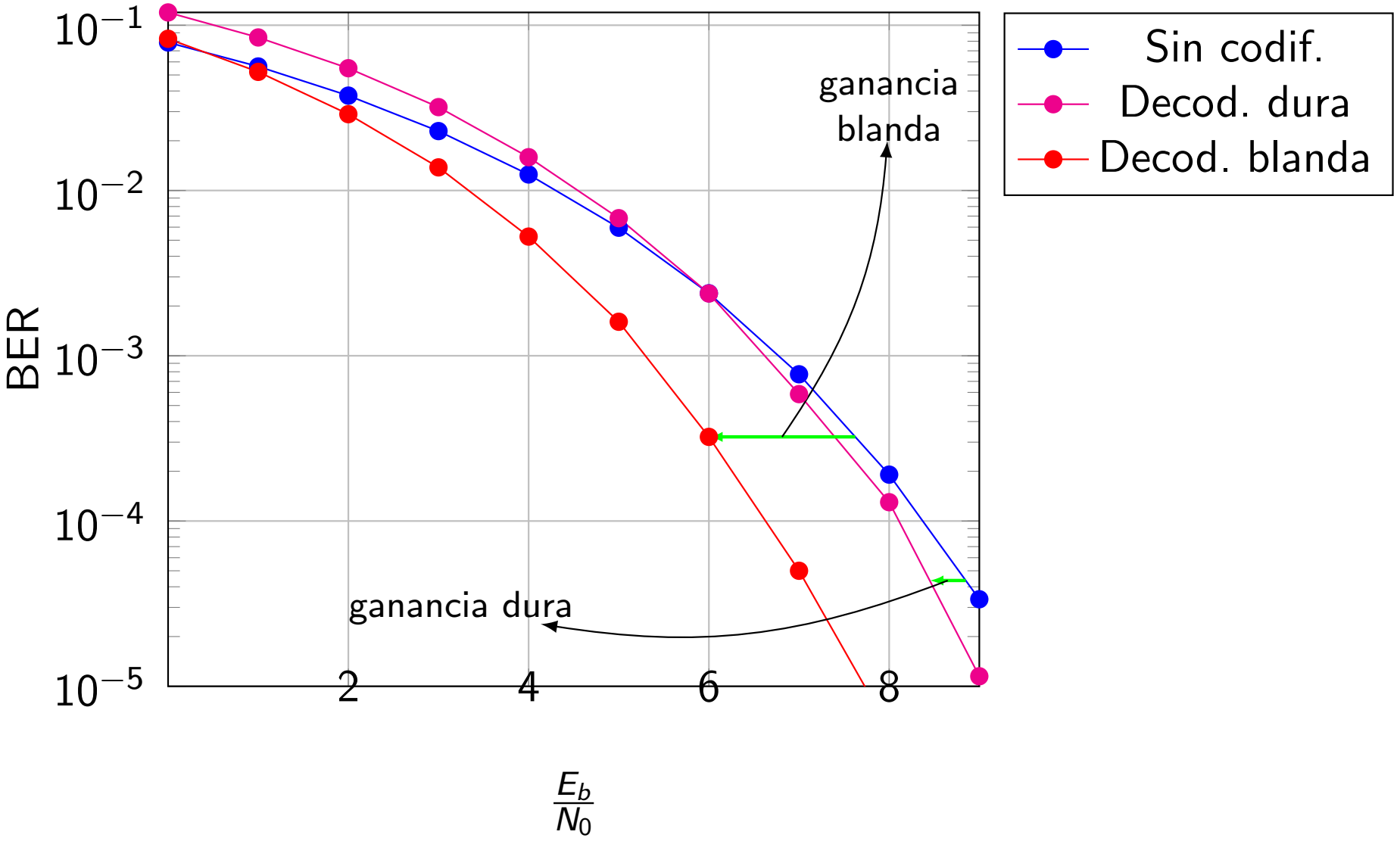
Matriz de control de paridad:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cualquier código de Hamming:

- Es *perfecto*
- $d_{min} = 3$
- $k = 2^j - j - 1$ y $n = 2^j - 1$ $\forall j \in \mathbb{N} \geq 2$
  - $j = 2 \rightarrow (3, 1)$
  - $j = 3 \rightarrow (7, 4)$
  - $j = 4 \rightarrow (15, 11)$

Hamming $(7, 4)$: ganancia de codificación



Hamming $(7, 4)$: decodificación

De antemano aplicamos

$$\mathbf{s} = \mathbf{e}\mathbf{H}^T$$

sobre cada $\mathbf{e}$ que suponga un único bit erróneo (el código solo puede corregir 1 bit):

error	síndrome
0000000	000
1000000	101
0100000	110
0010000	111
0001000	011
0000100	100
0000010	010
0000001	001

Hamming $(7, 4)$: decodificación

De antemano aplicamos

$$\mathbf{s} = \mathbf{e}\mathbf{H}^T$$

sobre cada $\mathbf{e}$ que suponga un único bit erróneo (el código solo puede corregir 1 bit):

error	síndrome
0000000	000
1000000	101
0100000	110
0010000	111
0001000	011
0000100	100
0000010	010
0000001	001

Ejemplo: $\mathbf{r} = [1100101]$

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}\mathbf{H}^\top = [1100101] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [110]$$

por lo que $\mathbf{e} = [0100000]$ y

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{r} + \mathbf{e} = \mathbf{r} = [1000101]\,.$$

Códigos equivalentes

Calcular H a partir de G

Si el código es sistemático, tenemos una manera sencilla de calcular la matriz de control de paridad...

...pero y si no lo es?

Códigos equivalentes

Calcular H a partir de G

Si el código es sistemático, tenemos una manera sencilla de calcular la matriz de control de paridad...

...pero y si no lo es? Si el código **no** es sistemático, se pueden hacer operaciones sobre su matriz generadora, $\mathbf{G}$, para transformarla en una de un código sistemático *equivalente*, $\mathbf{G}' = \begin{bmatrix}\mathbf{I}_k & \mathbf{P}\end{bmatrix}$.

Las operaciones *permitidas* son:

Sobre filas reemplazar una fila con una combinación lineal de si misma y otras filas **o** intercambiar filas.

Sobre columnas intercambiar columnas.

Códigos equivalentes

Calcular H a partir de G

Si el código es sistemático, tenemos una manera sencilla de calcular la matriz de control de paridad...

...pero y si no lo es? Si el código **no** es sistemático, se pueden hacer operaciones sobre su matriz generadora, $\mathbf{G}$, para transformarla en una de un código sistemático *equivalente*, $\mathbf{G}' = \begin{bmatrix}\mathbf{I}_k & \mathbf{P}\end{bmatrix}$.

Las operaciones *permitidas* son:

Sobre filas reemplazar una fila con una combinación lineal de si misma y otras filas **o** intercambiar filas.

Sobre columnas intercambiar columnas.

Definición: Códigos equivalentes

Dos códigos son equivalentes si tienen las mismas palabras código (quizás tras reordenar los bits).

Índice

Códigos cíclicos

Valores de k y n altos

Trabajar con matrices no es eficiente!!

Códigos cíclicos

Valores de k y n altos

Trabajar con matrices no es eficiente!!

Definición: Código cíclico

Es un código bloque lineal en el que cualquier desplazamiento *circular* de una palabra código da como resultado otra palabra código.

En un código cíclico,

- Si $[c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}]$ es palabra código, entonces $[c_{n-1}, c_0, c_1, \ldots, c_{n-2}]$ también lo es
  - i.e., cualquier palabra código es igual a otra desplazada circularmente.

Representación polinómica de palabras código

La palabra código $[c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}]$ se representa mediante el polinomio

$$c(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

¿Cómo se consigue

$$[c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}] \rightarrow [c_{n-1}, c_0, \cdots, c_{n-2}]$$

matemáticamente?

Representación polinómica de palabras código

La palabra código $[c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}]$ se representa mediante el polinomio

$$c(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

¿Cómo se consigue

$$[c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}] \rightarrow [c_{n-1}, c_0, \cdots, c_{n-2}]$$

matemáticamente? Multiplicando $c(x)$ por x módulo $(x^n - 1)$, i.e.,

$$\begin{aligned} xc(x) &= c_0 x + c_1 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^n = c_0 x + \cdots + c_{n-1} x^n + c_{n-1} - c_{n-1} \\ &= c_{n-1}(x^n - 1) + c_{n-1} + c_0 x + c_1 x^2 + \cdots + c_{n-2} x^{n-1} \end{aligned}$$

Entonces

$$(xc(x))_{x^n-1} = \underbrace{c_{n-1} + c_0 x + c_1 x^2 + \cdots + c_{n-2} x^{n-1}}_{[c_{n-1}, c_0, \cdots, c_{n-2}]}$$

Codificación

G	$\rightarrow$	$g(x)$
matriz		polinomio
generadora		generador

Codificación

G	$\rightarrow$	$g(x)$
matriz		polinomio
generadora		generador

La codificación se lleva a cabo multiplicando, módulo $x^n - 1$, el polinomio que representa a $\mathbf{b}_i$ por un **polinomio generador** $g(x)$,

$$c(x) = (b(x)g(x))_{x^n-1}$$

Codificación

G	$\rightarrow$	$g(x)$
matriz		polinomio
generadora		generador

La codificación se lleva a cabo multiplicando, módulo $x^n - 1$, el polinomio que representa a $\mathbf{b}_i$ por un **polinomio generador** $g(x)$,

$$c(x) = (b(x)g(x))_{x^n-1}$$

El polinomio generador, $g(x)$,

- es de grado $r = n - k$,
- debe ser un polinomio irreducible

Decodificación

$$\underset{\substack{\text{matriz de} \\ \text{control de paridad}}}{\mathbf{H}} \rightarrow \underset{\substack{\text{polinomio de} \\ \text{control de paridad}}}{h(x)}$$

Decodificación

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H} & \rightarrow & h(x) \\ \text{matriz de} & & \text{polinomio de} \\ \text{control de paridad} & & \text{control de paridad} \end{array}$$

El polinomio de control de paridad, $h(x)$,

- es de grado $r' = n - k - 1$,
- debe cumplir

$$(g(x)h(x))_{x^n-1} = 0.$$

Decodificación

$$\underset{\substack{\text{matriz de}\\ \text{control de paridad}}}{\mathbf{H}} \quad \rightarrow \quad \underset{\substack{\text{polinomio de}\\ \text{control de paridad}}}{h(x)}$$

El polinomio de control de paridad, $h(x)$,

- es de grado $r' = n - k - 1$,
- debe cumplir

$$(g(x)h(x))_{x^n-1} = 0.$$

Como en cualquier código bloque lineal, podemos hacer **decodificación por síndrome**:

$$s(x) = (r(x)h(x))_{x^n-1}$$