Codificación de Canal

Códigos Convolucionales

Manuel A. Vázquez
Jose Miguel Leiva
Joaquín Míguez

7 de marzo de 2024

Índice

Índice

Códigos bloque lineales vs. códigos convolucionales

Algunas diferencias (relacionadas entre sí)...

Códigos convolucionales	Códigos bloque lineales

Códigos bloque lineales vs. códigos convolucionales

Algunas diferencias (relacionadas entre sí)...

Códigos convolucionales	Códigos bloque lineales
• La codificación es continua	• La codificación es *bloque a bloque*

Códigos bloque lineales vs. códigos convolucionales

Algunas diferencias (relacionadas entre sí)...

Códigos convolucionales	Códigos bloque lineales
• La codificación es continua	• La codificación es *bloque a bloque*
• El sistema tiene memoria	• El sistema **no tiene memoria**

Códigos bloque lineales vs. códigos convolucionales

Algunas diferencias (relacionadas entre sí)...

Códigos convolucionales	Códigos bloque lineales
• La codificación es continua	• La codificación es *bloque a bloque*
• El sistema tiene memoria	• El sistema **no tiene memoria**
• *Mapping* secuencia-a-secuencia	• *Mapping* mensaje-a-palabra código

Códigos bloque lineales vs. códigos convolucionales

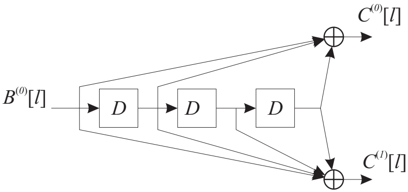
Algunas diferencias (relacionadas entre sí)...

Códigos convolucionales	Códigos bloque lineales
• La codificación es continua	• La codificación es *bloque a bloque*
• El sistema tiene memoria	• El sistema **no tiene memoria**
• *Mapping* secuencia-a-secuencia	• *Mapping* mensaje-a-palabra código

En ambos esquemas, todas las operaciones (e.g., la convolución), son en $GF(2)$.

Especificación

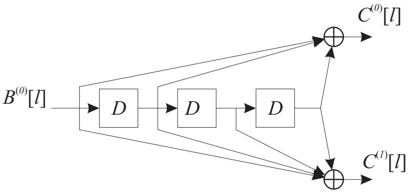
A menudo los códigos se definen mediante un diagrama de bloques que ilustra como la entrada se transforma en la salida, e.g.



- $B^{(j)}[l]$ es el l-ésimo bit de la j-ésima entrada
- $C^{(j)}[l]$ es el l-ésimo bit de la j-ésima salida
- $\boxed{\mathrm{D}}$ es un elemento de retardo

Especificación

A menudo los códigos se definen mediante un diagrama de bloques que ilustra como la entrada se transforma en la salida, e.g.

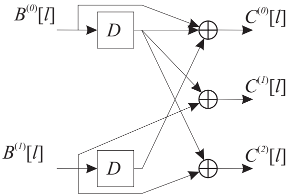


- $B^{(j)}[l]$ es el l-ésimo bit de la j-ésima entrada
- $C^{(j)}[l]$ es el l-ésimo bit de la j-ésima salida
- $\boxed{\text{D}}$ es un elemento de retardo

El sistema tiene memoria

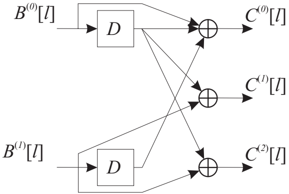
Los bits de salida dependen de los bits de entrada anteriores (y actuales): es una **máquina de estados**.

Especificación: ecuaciones



- Relación entre las entradas y las salidas

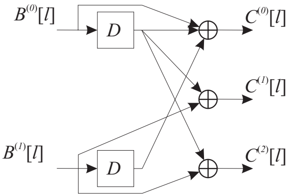
Especificación: ecuaciones



- Relación entre las entradas y las salidas

$$C^{(0)}[l] = B^{(0)}[l] + B^{(0)}[l-1] + B^{(1)}[l-1]$$

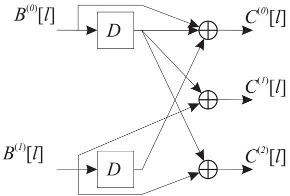
Especificación: ecuaciones



- Relación entre las entradas y las salidas

$$
\begin{aligned}
C^{(0)}[l] &= B^{(0)}[l] + B^{(0)}[l-1] + B^{(1)}[l-1] \\
C^{(1)}[l] &= B^{(0)}[l-1] + B^{(1)}[l]
\end{aligned}
$$

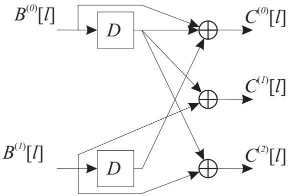
Especificación: ecuaciones



- Relación entre las entradas y las salidas

$$
\begin{aligned}
C^{(0)}[l] &= B^{(0)}[l] + B^{(0)}[l-1] + B^{(1)}[l-1] \\
C^{(1)}[l] &= B^{(0)}[l-1] + B^{(1)}[l] \\
C^{(2)}[l] &= B^{(0)}[l-1] + B^{(1)}[l]
\end{aligned}
$$

Especificación: ecuaciones



- Relación entre las entradas y las salidas

$$
\begin{aligned}
C^{(0)}[l] &= B^{(0)}[l] + B^{(0)}[l-1] + B^{(1)}[l-1] \\
C^{(1)}[l] &= B^{(0)}[l-1] + B^{(1)}[l] \\
C^{(2)}[l] &= B^{(0)}[l-1] + B^{(1)}[l]
\end{aligned}
$$

- expresaremos estas relaciones en el dominio D...

Convolución

...pero, dónde está la convolución en un código *convolucional*?

Convolución

...pero, dónde está la convolución en un código *convolucional*?

Convolución de señales en tiempo discreto

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

y suponiendo que la respuesta al impulso, $h[k]$, es no nula entre los instantes de tiempo, e.g., 0 y 1

$$= h[0]x[n] + h[1]x[n-1]$$

Convolución

...pero, dónde está la convolución en un código *convolucional*?

Convolución de señales en tiempo discreto

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

y suponiendo que la respuesta al impulso, $h[k]$, es no nula entre los instantes de tiempo, e.g., 0 y 1

$$= h[0]x[n] + h[1]x[n-1]$$

Para la primera salida, por ejemplo, tenemos

$$C^{(0)}[l] = \underbrace{B^{(0)}[l] + B^{(0)}[l-1]}_{B^{(0)}[l]*\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}} + \underbrace{B^{(1)}[l-1]}_{B^{(1)}[l]*\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}}$$

Convolución

...pero, dónde está la convolución en un código *convolucional*?

Convolución de señales en tiempo discreto

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

y suponiendo que la respuesta al impulso, $h[k]$, es no nula entre los instantes de tiempo, e.g., 0 y 1

$$= h[0]x[n] + h[1]x[n-1]$$

Para la primera salida, por ejemplo, tenemos

$$C^{(0)}[l] = \underbrace{B^{(0)}[l] + B^{(0)}[l-1]}_{B^{(0)}[l]*\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}} + \underbrace{B^{(1)}[l-1]}_{B^{(1)}[l]*\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}}$$

Cada salida es una suma de convoluciones!!

Transformada D

Definición: La transformada D...

...de una *secuencia* binaria $B^{(i)}[l]$ es

$$\begin{aligned} B^{(i)}(D) &= \sum_u B^{(i)}[u] \cdot D^u \\ &= \cdots B^{(i)}[-1] \cdot D^{-1} + B^{(i)}[0] + B^{(i)}[1] \cdot D^{1} + \cdots \end{aligned}$$

...y decimos $B^{(i)}[l] \overset{D}{\longleftrightarrow} B^{(i)}(D)$

Transformada D

Definición: La transformada *D*...

...de una *secuencia* binaria $B^{(i)}[l]$ es

$$B^{(i)}(D) = \sum_u B^{(i)}[u] \cdot D^u$$
$$= \cdots B^{(i)}[-1] \cdot D^{-1} + B^{(i)}[0] + B^{(i)}[1] \cdot D^1 + \cdots$$

...y decimos $B^{(i)}[l] \xleftrightarrow{D} B^{(i)}(D)$

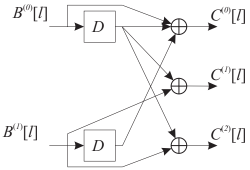
con la propiedad

$$\boxed{B^{(i)}[l-d] \leftrightarrow B^{(i)}(D) \cdot D^d}$$

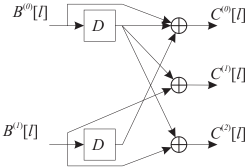
de manera que, e.g.,

$$B^{(i)}[l] + B^{(i)}[l-1] + B^{(i)}[l-2] + B^{(i)}[l-3] \xleftrightarrow{D} B^{(i)}(D)(1 + D + D^2 + D^3).$$

Matriz generadora



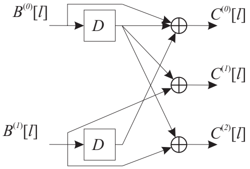
Matriz generadora



- En forma polinomial

$$C^{(0)}(D) = (1 + D)B^{(0)}(D) + DB^{(1)}(D)$$
$$C^{(1)}(D) = DB^{(0)}(D) + B^{(1)}(D)$$
$$C^{(2)}(D) = DB^{(0)}(D) + B^{(1)}(D)$$

Matriz generadora



- En forma polinomial

$$C^{(0)}(D) = (1 + D)B^{(0)}(D) + DB^{(1)}(D)$$
$$C^{(1)}(D) = DB^{(0)}(D) + B^{(1)}(D)$$
$$C^{(2)}(D) = DB^{(0)}(D) + B^{(1)}(D)$$

- En forma matricial: $\mathbf{C}(D) = \mathbf{B}(D)\mathbf{G}(D)$, con

$$\mathbf{C}(D) = \begin{bmatrix} C^{(0)}(D) & C^{(1)}(D) & C^{(2)}(D) \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}(D) = \begin{bmatrix} B^{(0)}(D) & B^{(1)}(D) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(D) = \begin{bmatrix} 1 + D & D & D \\ D & 1 & 1 \end{bmatrix}_{k \times n}$$

$\mathbf{G} \equiv$ matriz generadora
$g_{ij} \equiv$ contribución de la i-ésima entrada a la j-ésima salida

Definiciones

Definición: Memoria total...

...del código, M_t, es el número de unidades de retardo en el esquema de codificación.

$$M_t = \sum_{i=0}^{k-1} M^{(i)}$$

con

$$M^{(i)} = \max_j \operatorname{grado}\left(g_{ij}(D)\right) \equiv \text{memoria entrada } i\text{-ésima}$$

Definiciones

Definición: Memoria total...

...del código, M_t, es el número de unidades de retardo en el esquema de codificación.

$$M_t = \sum_{i=0}^{k-1} M^{(i)}$$

con

$$M^{(i)} = \max_j \text{grado}\,(g_{ij}(D)) \equiv \text{memoria entrada } i\text{-ésima}$$

Definición: Longitud de restricción

...del código, K, es la longitud máxima de la respuesta al impulso,

$$K = 1 + \max_{i,j} \text{grado}\ (g_{ij}(D))$$

Definiciones

Definición: Memoria total...

...del código, M_t, es el número de unidades de retardo en el esquema de codificación.

$$M_t = \sum_{i=0}^{k-1} M^{(i)}$$

con

$$M^{(i)} = \max_j \text{grado}\left(g_{ij}(D)\right) \equiv \text{memoria entrada } i\text{-ésima}$$

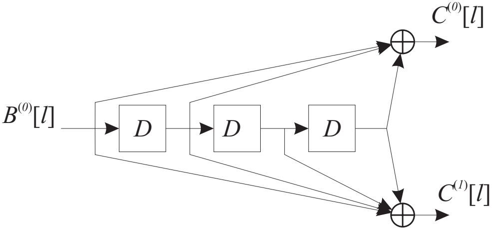
Definición: Longitud de restricción

...del código, K, es la longitud máxima de la respuesta al impulso,

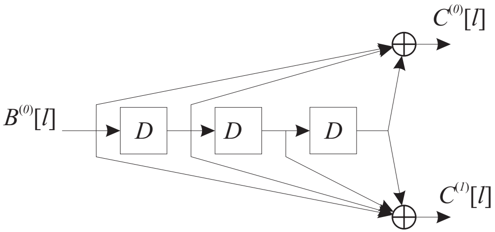
$$K = 1 + \max_{i,j} \text{grado}\ \left(g_{ij}(D)\right)$$

Un código convolucional también puede ser **sistemático** (misma definición).

El codificador como máquinas de estados finitos



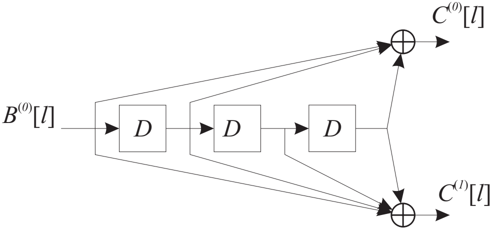
El codificador como máquinas de estados finitos



- El *estado* del codificador viene dado por los bits almacenados (producidos a la salida) de los elementos de retardo, aquí

$$\Psi \equiv (B^{(0)}[l-1], B^{(0)}[l-2], B^{(0)}[l-3]).$$

El codificador como máquinas de estados finitos

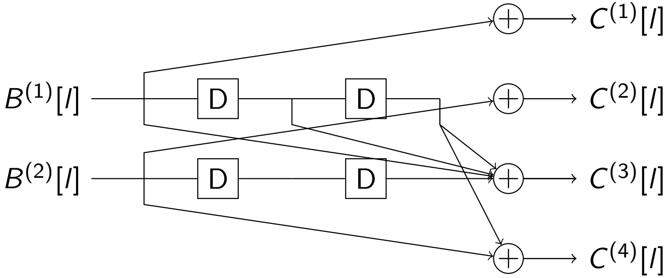


- El *estado* del codificador viene dado por los bits almacenados (producidos a la salida) de los elementos de retardo, aquí
$$\Psi \equiv (B^{(0)}[l-1], B^{(0)}[l-2], B^{(0)}[l-3]).$$

- **En general hay 2^{M_t} posibles estados** (se concatenan los bits almacenados por los elementos de retardo de todas las entradas). Una posible asignación en este caso:

$$\begin{array}{llll} \Psi_0 \to (0,0,0) & \Psi_1 \to (1,0,0) & \Psi_2 \to (0,1,0) & \Psi_3 \to (1,1,0) \\ \Psi_4 \to (0,0,1) & \Psi_5 \to (1,0,1) & \Psi_6 \to (0,1,1) & \Psi_7 \to (1,1,1) \end{array}$$

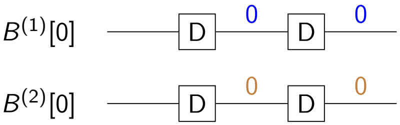
Transición de estado I



Veamos la evolución del estado del sistema para un un ejemplo sencillo...

l	-2	-1	0	$+1$
$B^{(1)}[l]$	0	0	1	1
$B^{(2)}[l]$	0	0	0	1
	bits anteriores		**bits a codificar**	

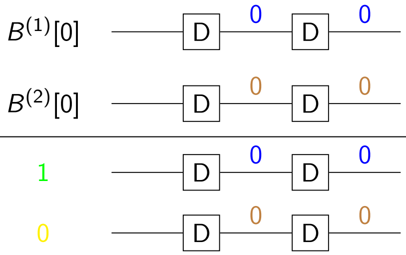
Transición de estado II



Estado inicial:

$\Psi = [0, 0, 0, 0,]$

Transición de estado II



Estado inicial:

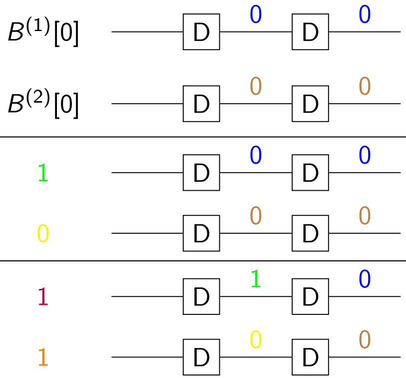
$\Psi = [0, 0, 0, 0,]$

$\Psi = [0, 0, 0, 0,]$

$B^{(1)}[0] = 1$

$B^{(2)}[0] = 0$

Transición de estado II



Estado inicial:

$\Psi = [0, 0, 0, 0,]$

$\Psi = [0, 0, 0, 0,]$

$B^{(1)}[0] = 1$

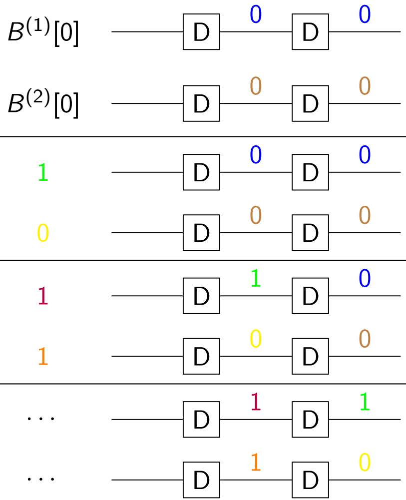
$B^{(2)}[0] = 0$

$\Psi = [1, 0, 0, 0,]$

$B^{(1)}[1] = 1$

$B^{(2)}[1] = 1$

Transición de estado II



Estado inicial:

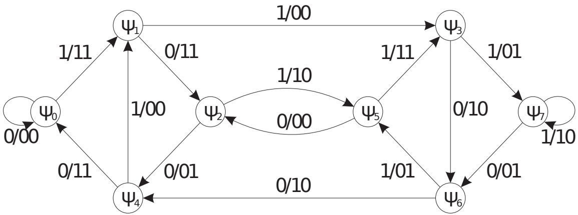
$\Psi = [0, 0, 0, 0,]$

$\Psi = [0, 0, 0, 0,]$
$B^{(1)}[0] = 1$
$B^{(2)}[0] = 0$

$\Psi = [1, 0, 0, 0,]$
$B^{(1)}[1] = 1$
$B^{(2)}[1] = 1$

$\Psi = [1, 1, 1, 0,]$
$B^{(1)}[2] = \cdots$
$B^{(2)}[2] = \cdots$

Diagrama de estados



Cada flecha esta etiquetada con

- los bits entrantes que dan lugar a esa transición, y
- los bits de salida que tienen lugar para ese estado y esos bits entrantes.

Índice

Codificación

Trivial si conocemos

- el estado inicial
- el diagrama de estados

Ejemplo

Supongamos que partimos del estado Ψ_0 y queremos codificar la secuencia [001]. El resultado es

$$[00\ 00\ 11]$$

Codificación

Trivial si conocemos

- el estado inicial
- el diagrama de estados

Ejemplo

Supongamos que partimos del estado Ψ_0 y queremos codificar la secuencia [001]. El resultado es

$$[00\ 00\ 11]$$

Cabecera

Después de la secuencia de information, se añade una *cabecera* para forzar al codificador a volver al estado inicial.

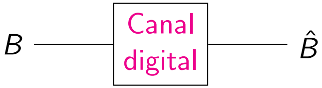
información	cabecera

Índice

1. Códigos con memoria
2. Codificación
3. Decodificación
4. Códigos Turbo

Decodificación

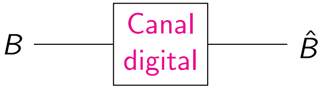
Dura



- Métrica: distancia de **Hamming**

Decodificación

Dura



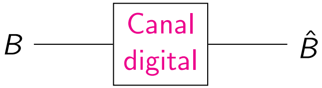
- Métrica: distancia de **Hamming**

Blanda

- Métrica: distancia **euclídea** (en cada paso, diferencia al cuadrado)

Decodificación

Dura



- Métrica: distancia de **Hamming**

Blanda

- Métrica: distancia **euclídea** (en cada paso, diferencia al cuadrado)

En ambos casos:

- el objetivo es encontrar la secuencia *completa* más probablemente transmitida
- la solución viene dada por el algoritmo de Viterbi

Algoritmo de Viterbi

Algunas claves

Algoritmo de Viterbi

Algunas claves

- Tenemos que evaluar todas las posible trayectorias que comienzan en el estado inicial (típicamente Ψ_0).

Algoritmo de Viterbi

Algunas claves

- Tenemos que evaluar todas las posible trayectorias que comienzan en el estado inicial (típicamente Ψ_0).
- Para cada posible transición, comparamos su salida asociada con la observada.

Algoritmo de Viterbi

Algunas claves

- Tenemos que evaluar todas las posible trayectorias que comienzan en el estado inicial (típicamente Ψ_0).
- Para cada posible transición, comparamos su salida asociada con la observada.
- En cada instante de tiempo, para cada posible estado, tenemos que encontrar el camino que llega hasta él con el menor coste acumulado

Algoritmo de Viterbi

Algunas claves

- Tenemos que evaluar todas las posible trayectorias que comienzan en el estado inicial (típicamente Ψ_0).
- Para cada posible transición, comparamos su salida asociada con la observada.
- En cada instante de tiempo, para cada posible estado, tenemos que encontrar el camino que llega hasta él con el menor coste acumulado
- Cuando dos caminos llegan al mismo estado, nos quedamos con el de menor coste *acumulado*.

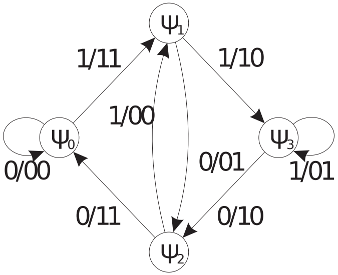
Algoritmo de Viterbi

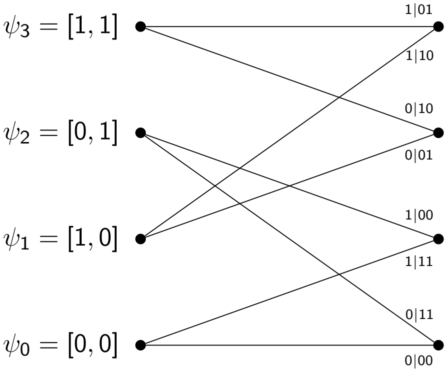
Algunas claves

- Tenemos que evaluar todas las posible trayectorias que comienzan en el estado inicial (típicamente Ψ_0).
- Para cada posible transición, comparamos su salida asociada con la observada.
- En cada instante de tiempo, para cada posible estado, tenemos que encontrar el camino que llega hasta él con el menor coste acumulado
- Cuando dos caminos llegan al mismo estado, nos quedamos con el de menor coste *acumulado*.
- Debido a la *cabecera* que se añade después de transmitir una secuencia de información, la decodificación debe terminar en el estado inicial.

Ejemplo sin errores

- Secuencia de entrada: 1 1 0 1 0 1 0 0
- Secuencia recibida: 11 10 10 00 01 00 01 11

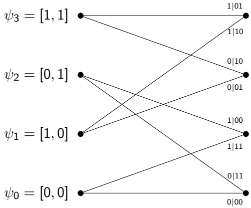


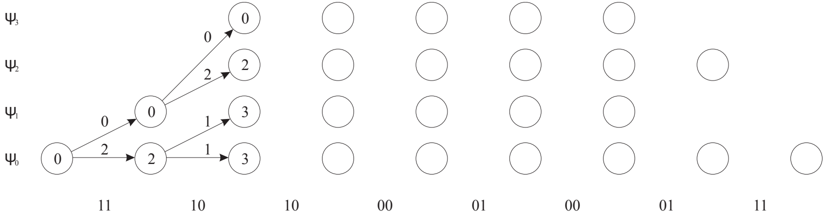


(Representación en **trellis**)

Ejemplo sin errores

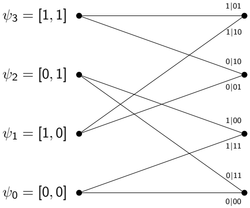
- Dos primeras iteraciones

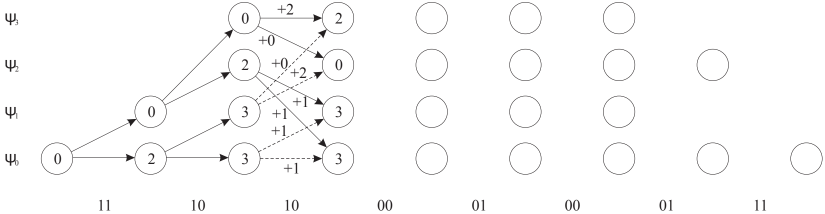




Ejemplo sin errores

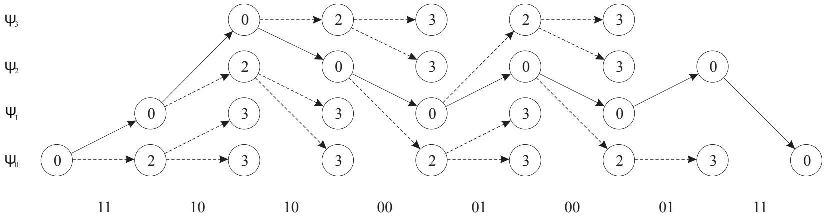
- Tercera iteración





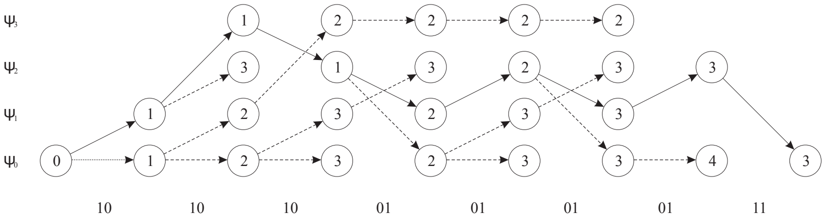
Ejemplo sin errores

- Resultado final



Ejemplo con errores

- Secuencia recibida: 10 10 10 01 01 01 01 11
- Resultado final



- La secuencia de estados $\Psi_0\Psi_1\Psi_3\Psi_2\Psi_1\Psi_2\Psi_1\Psi_2\Psi_0$ se corresponde con la secuencia de entrada 1101010

Prestaciones

- Decodificación blanda

$$P_e \approx \kappa_2 \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{2D_{min}E_s}{N_0}}\right)$$

donde κ_2 es el número de errores de bit (en la secuencia *decodificada*) que provoca la trayectoria asociada a D_{min}.

Prestaciones

- Decodificación blanda

$$P_e \approx \kappa_2 \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{2D_{min}E_s}{N_0}}\right)$$

donde κ_2 es el número de errores de bit (en la secuencia *decodificada*) que provoca la trayectoria asociada a D_{min}.

- Decodificación dura

$$P_e \approx \kappa_2 \sum_{i=\lfloor (D_{min}-1)/2 \rfloor+1}^{nz} \binom{nz}{i} \epsilon^i (1-\epsilon)^{nz-i}$$

donde z es la longitud de la trayectoria asociada a D_{min} y ϵ es la probabilidad de error de bit.

Determinación de la distancia mínima, D_{min}

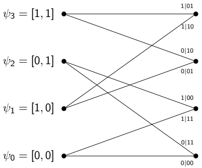
Un código convolucional es lineal, por lo que **la secuencia codificada más cercana a la todo-ceros determina** D_{min}.

Determinación de la distancia mínima, D_{min}

Un código convolucional es lineal, por lo que **la secuencia codificada más cercana a la todo-ceros determina** D_{min}.

Objetivo

Buscamos la secuencia de estados (camino) que empieza en la secuencia todo-zeros y vuelve a ella con el menor coste acumulado.

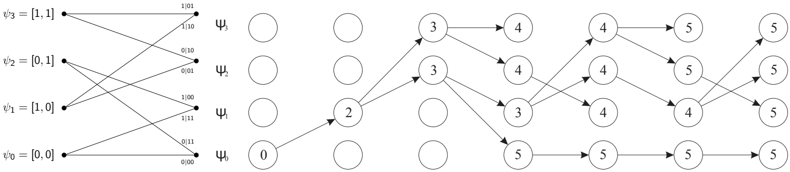


Determinación de la distancia mínima, D_{min}

Un código convolucional es lineal, por lo que **la secuencia codificada más cercana a la todo-ceros determina** D_{min}.

Objetivo

Buscamos la secuencia de estados (camino) que empieza en la secuencia todo-zeros y vuelve a ella con el menor coste acumulado.

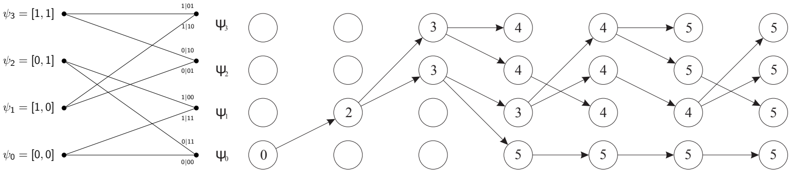


Determinación de la distancia mínima, D_{min}

Un código convolucional es lineal, por lo que **la secuencia codificada más cercana a la todo-ceros determina** D_{min}.

Objetivo

Buscamos la secuencia de estados (camino) que empieza en la secuencia todo-zeros y vuelve a ella con el menor coste acumulado.



D_{min} permite calcular los otros parámetros que determinan las prestaciones

$$D_{min} = 5 \Rightarrow \begin{cases} \kappa_2 = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Decodificación blanda

Por simplicidad, asumimos modulación antipodal i.e., $A[l] = \pm A$.

Notación

$$B_{0,:} = \{B[0], B[1], B[2], \cdots\} \equiv \text{bits de entrada}$$
$$q_{0,:} = \{q[0], q[1], q[2], \cdots\} \equiv \text{estimaciones blandas}$$

2 posibilidades

Decodificación blanda

Por simplicidad, asumimos modulación antipodal i.e., $A[l] = \pm A$.

Notación

$$B_{0,:} = \{B[0], B[1], B[2], \cdots\} \equiv \text{bits de entrada}$$
$$q_{0,:} = \{q[0], q[1], q[2], \cdots\} \equiv \text{estimaciones blandas}$$

2 posibilidades

- Decodificación blanda de **secuencia**: minimiza la probabilidad de error de secuencia

$$\hat{B}_{0,:} = \arg \max_{B_{0,:}} p(q_{0,:}|B_{0,:})$$

Decodificación blanda

Por simplicidad, asumimos modulación antipodal i.e., $A[l] = \pm A$.

Notación

$$B_{0,:} = \{B[0], B[1], B[2], \cdots\} \equiv \text{bits de entrada}$$
$$q_{0,:} = \{q[0], q[1], q[2], \cdots\} \equiv \text{estimaciones blandas}$$

2 posibilidades

- Decodificación blanda de **secuencia**: minimiza la probabilidad de error de secuencia

$$\hat{B}_{0,:} = \arg\max_{B_{0,:}} p(q_{0,:}|B_{0,:})$$

- Decodificación blanda **bit a bit**: minimiza la probabilidad de error de bit

$$\hat{B}[i] = \arg\max_{B[i]} p(B[i]|q_{0,:}), i = 0, 1, \cdots$$

Decodificación blanda de secuencia

criterio ML $\equiv$ criterio MAP

$$\hat{B}_{0,:} = \arg\max_{B_{0,:}} p(q_{0,:}|B_{0,:}) = \arg\max_{B_{0,:}} \prod_{l} p(q[l]|B[l])$$

$$= \arg\min_{B_{0,:}} \sum_{l} -\log p(q[l]|B[l])$$

donde

$$p(q[l]|B[l]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(q[l]-A[l])^2}{2\sigma^2}\right).$$

Se implementa con el algoritmo de Viterbi

Decodificación blanda de bit

criterio MAP

Aplicamos el criterio máximo a posteriori (MAP) a nivel de bit para calcular

$$P(B[l] = 1|q_{0,:})$$

y decidimos

$$\hat{B}[l] = \begin{cases} 1 & \text{si } p(B[l] = 1|q_{0,:}) > P(B[l] = 0|q_{0,:}) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se implementa con el algoritmo **BCJR** (Bahl, Cocke, Jelinek y Raviv)

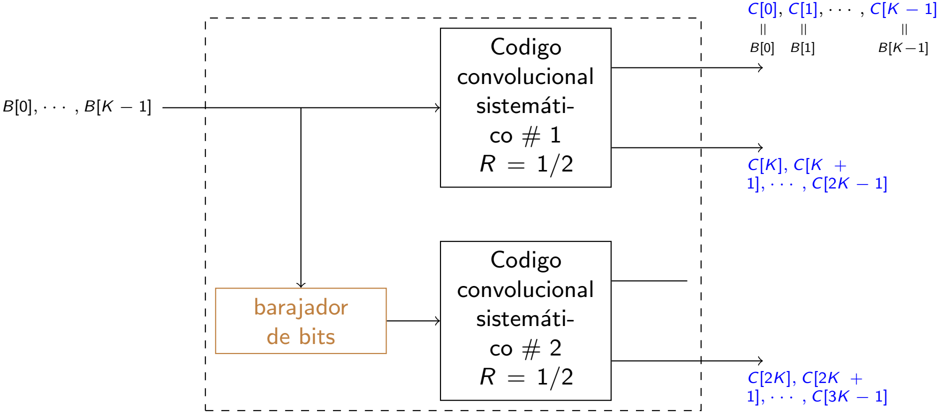
Índice

Códigos turbo

- Se forman concatenando códigos convolucionales, que operan sobre los bits ordenados de distinta forma.

Códigos turbo

- Se forman concatenando códigos convolucionales, que operan sobre los bits ordenados de distinta forma.
- Principales elementos:
  - 2 códigos convolucionales
  - barajador de bits



Observaciones

- El barajador se usa para aumentar la memoria del sistema sin aumentar la complejidad de decodificación.

Observaciones

- El barajador se usa para aumentar la memoria del sistema sin aumentar la complejidad de decodificación.
- Buenas prestaciones a baja SNR (a 0.7 dB del límite de Shannon).

Observaciones

- El barajador se usa para aumentar la memoria del sistema sin aumentar la complejidad de decodificación.
- Buenas prestaciones a baja SNR (a 0.7 dB del límite de Shannon).
- En cuanto a la decodificación...
  - Es iterativa, ya que hay que "poner de acuerdo" la decodificación de la secuencia original y de la versión "barajada".
  - Se basa en el algoritmo BCJR