Redes de Sensores

Estimación

Manuel A. Vázquez
Joaquín Míguez
Jose Miguel Leiva

4 de febrero de 2024

Índice

1. Contexto
2. Sistema dinámico
3. El filtro de Kalman
4. El filtro de Kalman con término de control

Índice

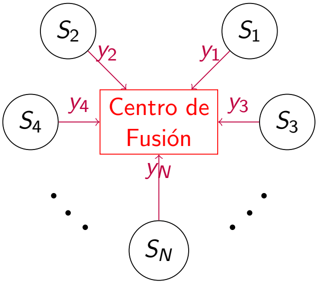
1 Contexto

2 Sistema dinámico

3 El filtro de Kalman

4 El filtro de Kalman con término de control

Red para estimación centralizada



Estructura de la red con N sensores ($i = 1, \ldots, N$):

- $S_i \equiv$ sensor i-ésimo
- $y_i \equiv$ observación en el sensor i-ésimo

El CF debe utilizar el conjunto de observaciones para estimar un vector $\mathbf{x}$ de dimensiones $M \times 1$.

Estimación clásica

La estimación de $\mathbf{x}$ dada la colección de datos $\mathbf{y} = \{y_1, ..., y_N\}$ es equivalente a un problema de estimación *clásico*. Hay varios estimadores posibles:

- Máxima verosimilitud (ML$\equiv$ maximum likelihood)

$$\hat{\mathbf{x}}^{ML} = \arg\max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}).$$

- Máximo a posteriori (MAP)

$$\hat{\mathbf{x}}^{MAP} = \arg\max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}).$$

- Mínimo error cuadrático medio (MMSE)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^{MMSE} &= \arg\min_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbb{E}\left[\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{x}|\mathbf{y}\right] = \int \mathbf{x} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Índice

1 Contexto

2 Sistema dinámico

3 El filtro de Kalman

4 El filtro de Kalman con término de control

Modelo dinámico

Un problema más interesante...

¿Y si la variable de interés cambia con el tiempo?

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}_t$$

siendo t una variable temporal discreta. Si $\mathbf{x}$ era una variable aleatoria, entonces $\mathbf{x}_t$ es un *proceso estocástico*.

Objetivo

Queremos hacer un **seguimiento** de la evolución de $\mathbf{x}$ con el tiempo.

Entonces, necesitamos dos ecuaciones

- una ecuación de estado que modele la evolución de la variable de interés
- una ecuación de observación que modele la relación entre la variable de interés y lo observado

Modelo lineal y gaussiano

- El proceso $\mathbf{x}_t$ evoluciona de acuerdo a un modelo lineal y gaussiano

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t \qquad \text{(ecuación de estado)}$$

  donde $\mathbf{F}$ es una matriz $M \times M$, y $\mathbf{v}_t$ es un vector aleatorio $M \times 1$ gaussiano de media $\mathbf{0}$ y covarianza $\mathbf{Q}$, siendo M el número de elementos en $\mathbf{x}_t$.

- La relación entre la variable de interés $\mathbf{x}_t$ y las observaciones viene dada por

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t \qquad \text{(ecuación de observación)}$$

  donde $\mathbf{H}$ es una matriz $N \times M$ y $\mathbf{w}_t$ es un vector aleatorio $N \times 1$ gaussiano de media $\mathbf{0}$ y covarianza $\mathbf{R}$.

Las observaciones...

...dadas por el vector $\mathbf{y}_t$, recogen las medidas tomadas por todos los sensores

Ejemplo I

Objetivo

Localización y seguimiento de un objeto con velocidad constante y *conocida* $\mathbf{c}$.

- La posición del objetivo, $\mathbf{x}_t$ (que aquí representa el estado del sistema), evoluciona de acuerdo a

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{c}T + \mathbf{v}_t,$$

donde T es el período de muestreo, i.e., el tiempo transcurrido entre dos observaciones consecutivas.

- Observamos directamente la posición:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t$$

Ejemplo II

Objetivo

Localización y seguimiento de un objeto con velocidad constante *desconocida*.

Para estimar la velocidad, la incluimos en el estado del sistema

$$\mathbf{x}'_t = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

- La ecuación de estado es ahora

$$\mathbf{x}'_t = \mathbf{F}\mathbf{x}'_{t-1} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \text{ with } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

- ...y la ecuación de observación

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}'_t + \mathbf{w}_t, \text{ with } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Índice

1 Contexto

2 Sistema dinámico

3 El filtro de Kalman

4 El filtro de Kalman con término de control

¿Qué es el filtro de Kalman?

Es un método recursivo para el cálculo de distribuciones de probabilidad a posteriori en sistemas dinámicos lineales y gaussianos.

- recursivo: nos da una estimación en un determinado instante de tiempo utilizando la estimación del instante anterior (igual que hacen los algoritmos adaptativos).
- calcula distribuciones de probabilidad: no nos va a dar una estimación del parámetro de interés sino su distribución (determinada por la media y la matriz de covarianza).
- ...en sistemas dinámicos: en sistemas que cambian con el tiempo
- lineales: las ecuaciones que modelan el sistema son lineales con respecto a la variable de interés.
- gaussianos: el ruido que afecta a esas mismas ecuaciones es gaussiano.

Sistema dinámico en formato de espacio de estados

$$\left.\begin{array}{lcl} \mathbf{x}_t = \mathbf{F}_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t & \longleftarrow & \text{ecuación de estado} \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t & \longleftarrow & \text{ecuación de observación} \end{array}\right\} \text{sistema dinámico en formato de espacio de estados}$$

Objetivo

Estimar (recursivamente) el estado del sistema $\mathbf{x}_t$ dadas las observaciones, $\mathbf{y}_t$

El índice temporal es discreto, i.e, $t = 0, 1, \cdots$

Notación

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t$$

- $\mathbf{x}_t$ es el vector de estado (del sistema) en el instante t
- $\mathbf{F}_t$ es la matriz de transición de estado: determina la evolución del estado del sistema
- $\mathbf{v}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{v}_t|\mathbf{0}, \mathbf{Q}_t)$ es el ruido estado (o de proceso)
  - $\mathbf{Q}_t$ es la matriz de covarianza del ruido de estado (puede ser variante con el tiempo)

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t$$

- $\mathbf{y}_t$ es el el vector de observaciones
- $\mathbf{H}_t$ es la matriz de observaciones: relaciona las observaciones con el estado (desconocido)
- $\mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}_t|\mathbf{0}, \mathbf{R}_t)$ es el ruido de observación
  - $\mathbf{R}_t$ es la matriz de covarianza del ruido de observación (puede ser variante con el tiempo)

Filtrado: hipótesis de partida

La distribución *a priori* (inicial) del estado es Gaussiana, i.e.,

$$p(\mathbf{x}_0) \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_0 | \hat{\mathbf{x}}_{0|0}, \mathbf{P}_{0|0}\right)$$

siendo **conocidas**

- $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$: la media de la distribución del estado en el instante 0
- $\mathbf{P}_{0|0}$: matriz de cov. de la distr. del estado en el instante 0

Notación

- $\hat{\mathbf{x}}_{a|b} \equiv$ media estimada en el instante a utilizando las observaciones hasta el instante b
- $\mathbf{P}_{a|b} \equiv$ matriz de covarianza estimada en el instante a utilizando las observaciones hasta el instante b

Al principio

En el instante 0 no hay ninguna observación disponible...pero la notación sigue siendo conveniente.

Filtrado: recursión

Si se cumple la hipótesis de partida, entonces para $t = 1, 2, \cdots$

$$p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t-1}) \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_t | \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}, \mathbf{P}_{t|t-1}\right) \quad \longleftarrow \quad \text{fdp predictiva}$$

$$p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t}) \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_t | \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, \mathbf{P}_{t|t}\right) \quad \longleftarrow \quad \text{fdp filtrada}$$

...esto es, ambas fdp's son Gaussianas si la distribución inicial es Gaussiana, y el **filtro de Kalman** nos da sus medias y covarianzas en un proceso que involucra dos etapas...

Notación

$y_{i:j} \equiv \{y_i, y_{i+1}, \cdots, y_j\}$

Solución

Etapa predictiva

$$\left.\begin{array}{lll}\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} = \mathbf{F}_{t-1}\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} & \longleftarrow & \text{media predictiva} \\ \mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{Q}_{t-1} + \mathbf{F}_{t-1}\mathbf{P}_{t-1|t-1}\mathbf{F}_{t-1}^{H} & \longleftarrow & \text{covarianza predictiva}\end{array}\right\} \text{asociadas a la fdp predictiva}$$

Etapa de actualización

$$\left.\begin{array}{lll}\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{H}_t^{H}\left(\mathbf{H}_t\mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{H}_t^{H} + \mathbf{R}_t\right)^{-1} & \longleftarrow & \text{ganancia de Kalman} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t\left(\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}\right) & \longleftarrow & \text{media filtrada} \\ \mathbf{P}_{t|t} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t\right)\mathbf{P}_{t|t-1} & \longleftarrow & \text{covarianza filtrada}\end{array}\right\} \text{asociadas a la fdp filtrada}$$

Observaciones

- Para poder aplicar el KF
  - el **sistema** tiene que ser **lineal**
  - el **ruido** tiene que ser **gaussiano**
  - la **distribución inicial** del estado tiene que ser **gaussiana**
- El KF nos da (como salida) una distribución de probabilidad[1], que contiene toda la información acerca del parámetro de interés

En nuestro caso...

$p(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{y}_{1:t})$ contiene toda la información disponible en el instante t acerca de $\mathbf{x}_t$, y a partir de ella podemos obtener la media, mediana, moda...

- $\hat{\mathbf{x}}_{t|t} \equiv$ estimador MMSE del estado en el instante t
- $\mathrm{Tr}\left\{\mathbf{P}_{t|t}\right\} \equiv$ error mínimo (valor del error cuadrático en $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$)

[1] ...porque una gaussiana está completamente determinada por su media y matriz de covarianza.

Índice

1 Contexto

2 Sistema dinámico

3 El filtro de Kalman

4 El filtro de Kalman con término de control

Ecuaciones de estado y observación

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B}_t\mathbf{u}_t + \mathbf{v}_{t-1} \quad \longleftarrow \quad \text{ecuación de estado}$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t \quad \longleftarrow \quad \text{ecuación de observación}$$

El término de control, $\mathbf{B}_t\mathbf{u}_t$, con

- $\mathbf{B}_t$ es la matriz de control, y
- $\mathbf{u}_t$ el vector de control

es **conocido** (en todo instante de tiempo t) y es un mecanismo para modificar el estado (desconocido).

¿Para qué sirve el término de control?

- ...a veces podemos ejercer un cierto *control* sobre aquello que queremos estimar

> **example**
> Problema: estimar la trayectoria de un dron que nosotros mismos manejamos

- ...desde un punto de vista matemático, es útil para modelar funciones *afines*

El término de control es algo que afecta al estado[2], pero que no es necesario estimar porque es conocido.

[2] ...por lo que debe figurar en dicha ecuación!!

Solución

Etapa predictiva

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} = \mathbf{F}_{t-1}\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} + \mathbf{B}_t\mathbf{u}_t \quad \longleftarrow \text{ media predictiva}$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{Q}_{t-1} + \mathbf{F}_{t-1}\mathbf{P}_{t-1|t-1}\mathbf{F}_{t-1}^H \quad \longleftarrow \text{ covarianza predictiva}$$

asociadas a la fdp predictiva

Etapa de actualización

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{H}_t^H\left(\mathbf{H}_t\mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{H}_t^H + \mathbf{R}_t\right)^{-1} \quad \longleftarrow \text{ ganancia de Kalman}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t\left(\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}\right) \quad \longleftarrow \text{ media filtrada}$$

$$\mathbf{P}_{t|t} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t\right)\mathbf{P}_{t|t-1} \quad \longleftarrow \text{ covarianza filtrada}$$

asociadas a la fdp filtrada