Códigos LDPC sobre canal binario con símbolo borrado

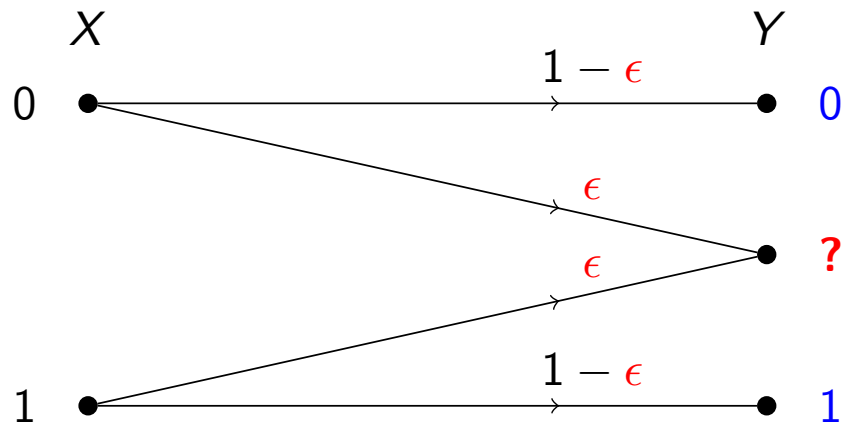
Pablo M. Olmos
Manuel A. Vázquez

7 de marzo de 2024

Índice

Índice

El canal binario con símbolo borrado (BEC)

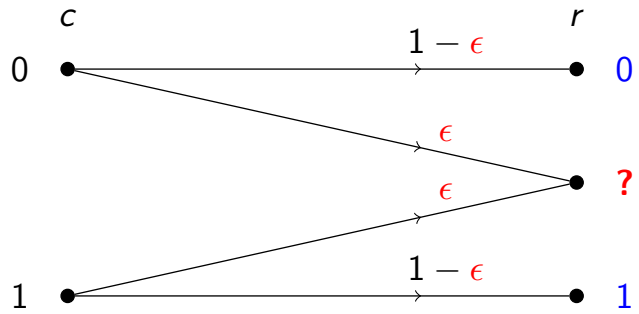


Capacidad:
$C = 1 - \epsilon$

El modelo es muy simple, pero aún así...

- sorprendentemente, **la mayoría de propiedades y afirmaciones que encontramos en nuestra investigación de códigos LDPC sobre BEC son mucho más generales** (R. Urbanke and T. Richardson, Modern Coding Theory) y, además,
- en la capa de enlace de algunos sistemas de comunicaciones se usan códigos correctores de borrado.

BEC: consideraciones prácticas



Transmisión sin codificar

Probabilidad de error de bit *del canal* $\equiv \epsilon$

Transmisión de bits codificados

$$\underbrace{\mathbf{b}}_{\substack{k \text{ bits de} \\ \text{información}}} \rightarrow \underbrace{\mathbf{c}}_{\substack{n \text{ bits} \\ \text{codificados}}} \rightarrow \underbrace{\mathbf{r}}_{\substack{n \text{ observaciones} \\ \text{a la salida del canal}}} \rightarrow \underbrace{\hat{\mathbf{c}}}_{\substack{\text{palabra código} \\ \text{decodificada}}}$$

La tasa del código sigue siendo $R = \frac{k}{n}$

Teorema de codificación

Podemos conseguir una probabilidad de error (de palabra código) arbitrariamente pequeña,

$$P(\hat{\mathbf{c}} \neq \mathbf{c}|\mathbf{r}) \to 0,$$

cuando $n \to \infty$ si la tasa del código está por debajo de la capacidad, i.e.,

$$R < C.$$

No queremos esto...

Utilizar $n \to \infty$ es un derroche de recursos (tiempo, energía).

Objetivo

...diseñar esquemas de codificación y decodificación **viables** que nos permitan operar cerca de la capacidad del canal.

Índice

Códigos bloque lineales

- Matriz generadora: $\mathbf{c} = \mathbf{bG}$ donde $\mathbf{b} \in \{0,1\}^k$.
- Matriz de control de paridad: $\mathbf{cH}^T = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{c} \in \mathcal{C}$.
  - $\mathcal{C}$ es el conjunto de todas las palabras código (*codebook*)
- Cada fila de la matriz de control de paridad da lugar a una restricción lineal entre los bits codificados.

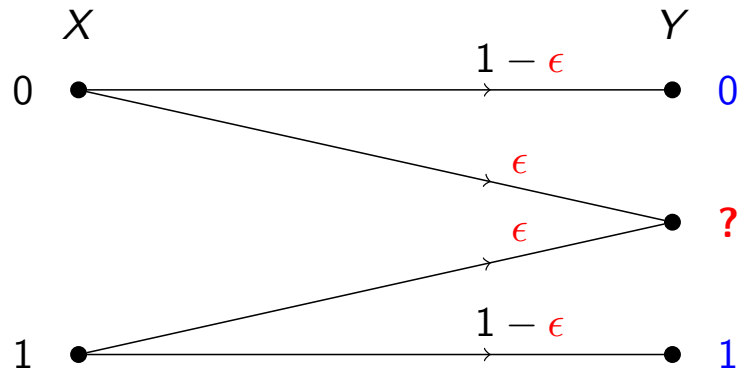
Para un código Hamming $(7,4)$,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto...

$$c_1 \oplus c_3 \oplus c_5 \oplus c_7 = 0$$
$$c_2 \oplus c_3 \oplus c_6 \oplus c_7 = 0$$
$$c_4 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 = 0$$

Transmisión sobre BEC



- Código bloque lineal (n, k) con matrices **G** y **H**.
- Se envía la palabra código **c**.
- Se observa el vector **r**.

El canal *borra* unos bits y otros no:

- $\mathcal{E}$ es un conjunto que contiene los índices de los bits borrados
- $\mathcal{R}$ es un conjunto que contiene los índices de los bits recibidos
- $\mathcal{E} \cup \mathcal{R} = \{1, \ldots, n\}$.

Por tanto, para el BEC

$$\mathbf{r}(\mathcal{E}) = ?, \qquad \mathbf{r}(\mathcal{R}) = \mathbf{c}(\mathcal{R})$$

Decodificación sobre BEC: ejemplo

- Código Hamming $(7, 4)$.
- $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es enviado.
- $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 & ? & 1 & 0 & ? & ? & 0 \end{bmatrix}$ es recibido.
- $\mathcal{E} = \{2, 5, 6\}$ y $\mathcal{R} = \{1, 3, 4, 7\}$.

Así pues, el sistema de ecuaciones se puede simplificar

$$\left.\begin{aligned} c_1 \oplus c_3 \oplus c_5 \oplus c_7 &= 0 \\ c_2 \oplus c_3 \oplus c_6 \oplus c_7 &= 0 \\ c_4 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 1 \oplus 1 \oplus c_5 \oplus 0 &= 0 \\ c_2 \oplus 1 \oplus c_6 \oplus 0 &= 0 \\ 0 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus 0 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} c_5 &= 0 \\ c_2 \oplus c_6 &= 1 \\ c_5 \oplus c_6 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones binarias resulta una única solución $\hat{\mathbf{c}} = [1110000] = \mathbf{c}$.

Decodificación sobre el BEC: formulación general

- Código bloque lineal (n, k) con matrices $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$.
- Se envía la palabra código $\mathbf{c}$.
- Se observa el vector $\mathbf{r}$.
- $\mathbf{H}_{\mathcal{E}}$ es la submatriz de $\mathbf{H}$ que se obtiene eligiendo las *columnas* cuyo índices están en $\mathcal{E}$ (y, análogamente, $\mathbf{H}_{\mathcal{R}}$ es...).

Decodificación óptima maximum a posteriori

Encontrar $\mathbf{c}(\mathcal{E})$ resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{c}(\mathcal{E})\mathbf{H}_{\mathcal{E}}^{T} = \mathbf{c}(\mathcal{R})\mathbf{H}_{\mathcal{R}}^{T}$$

En el ejemplo anterior:

$$\begin{bmatrix} c_2 & c_5 & c_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistema de ecuaciones lineales para decodificación MAP

$$\mathbf{c}\mathbf{H}^\top = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_7 \end{bmatrix} = 0$$

$$= c_1\mathbf{h}_1 + c_2\mathbf{h}_2 + c_3\mathbf{h}_3 + c_4\mathbf{h}_4 + c_5\mathbf{h}_5 + c_6\mathbf{h}_6 + c_7\mathbf{h}_7 = 0$$

$$= c_2\mathbf{h}_2 + c_5\mathbf{h}_5 + c_6\mathbf{h}_6 + c_1\mathbf{h}_1 + c_3\mathbf{h}_3 + c_4\mathbf{h}_4 + c_7\mathbf{h}_7 = 0$$

$$= \begin{bmatrix} c_2 & c_5 & c_6 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_5 \\ \mathbf{h}_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_{\mathcal{E}}{}^T} + \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & c_4 & c_7 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_3 \\ \mathbf{h}_4 \\ \mathbf{h}_7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_{\mathcal{R}}^T} = 0$$

Así pues,

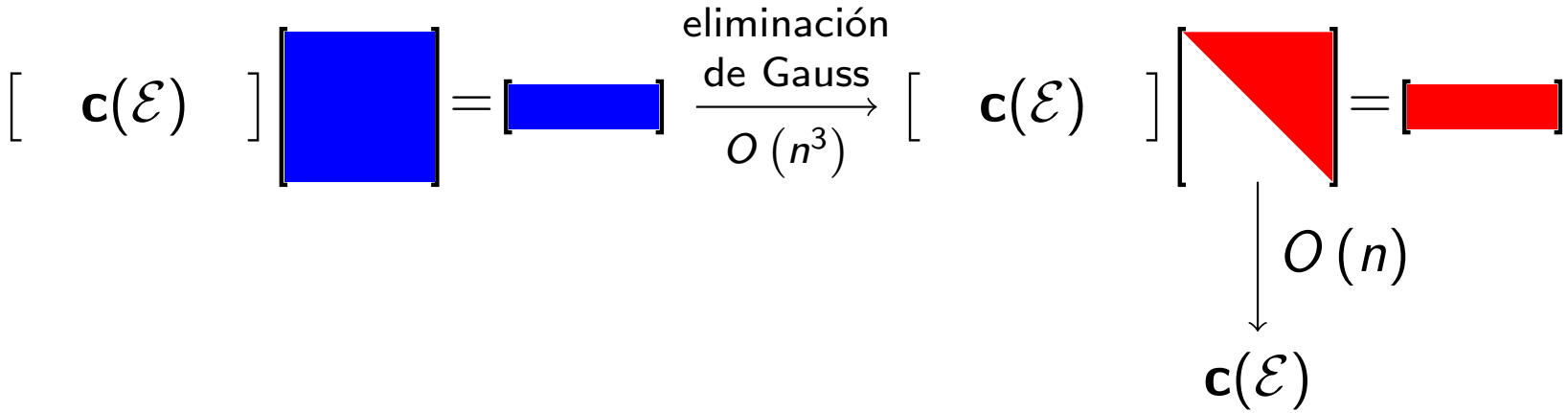
$$\begin{bmatrix} c_2 & c_5 & c_6 \end{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathcal{E}}{}^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & c_4 & c_7 \end{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathcal{R}}^T$$

$$\mathbf{h}_j \equiv j\text{-ésima fila de } \mathbf{H}^\top = j\text{-ésima columna de } \mathbf{H}$$

Decodificación MAP óptima (aproximación clásica)

Al resolver el sistema de ecuaciones lineales, $\mathbf{c}(\mathcal{E})\mathbf{H}_{\mathcal{E}}^T = \mathbf{c}(\mathcal{R})\mathbf{H}_{\mathcal{R}}^T$ para encontrar $\mathbf{c}(\mathcal{E})$, hay dos posibles resultados

- el sistema tiene múltiples soluciones $\rightarrow$ todas son igualmente probables y decimos que ha ocurrido un error de decodificación.
- el sistema tiene una única solución $\rightarrow \hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$, y **no hay error de decodificación**.



Complejidad computacional:

- Eliminación de Gauss requiere $O\left(n^3\right)$ operaciones
- Después de eliminación, sustitución hacia atrás es $O\left(n\right)$

Índice

Decodificación subóptima sobre BEC: ejemplo I

Sea:

- Código Hamming $(7, 4)$
- $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es enviada.
- $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 & ? & 1 & 0 & ? & ? & 0 \end{bmatrix}$ es recibida.

Suponiendo que el sistema ya está triangularizado y revela toda la información...

$$c_5 = 0$$

$$c_5 + c_6 = 0 \rightarrow c_6 = 0$$

$$c_2 + c_6 = 1 \rightarrow c_2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_6 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Decodificación

La complejidad es $O(n)$.

Decodificación subóptima sobre BEC: ejemplo II

Otra transmisión:

- Código Hamming $(7, 4)$
- $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es enviada.
- $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & ? & 0 & 0 & ? & ? \end{bmatrix}$ es recibida.

Ahora,

$$c_3 \oplus c_7 = 0$$
$$c_3 \oplus c_6 \oplus c_7 = 1$$
$$c_6 \oplus c_7 = 0$$

Error de decodificación

No hay ecuaciones con una sola variable. No se puede revelar ninguna información.

(si utilizáramos decodificación **óptima**, c_3 se obtiene ($c_3 = 1$) sumando las dos últimas ecuaciones)

Teoría de códigos moderna vs clásica

Clásica

- Decodificación **óptima** via ML/MAP con $O\left(n^3\right)$ operaciones. Restringe los códigos que se pueden utilizar en la práctica.
- **Longitud (n) pequeña** porque de lo contrario la complejidad de decodificación es prohibitiva. **No podemos operar cerca de la capacidad** con probabilidad de error arbitrariamente pequeña.
- Ejemplos: Códigos bloque lineales (BCH, Reed Solomon), códigos convolucionales...

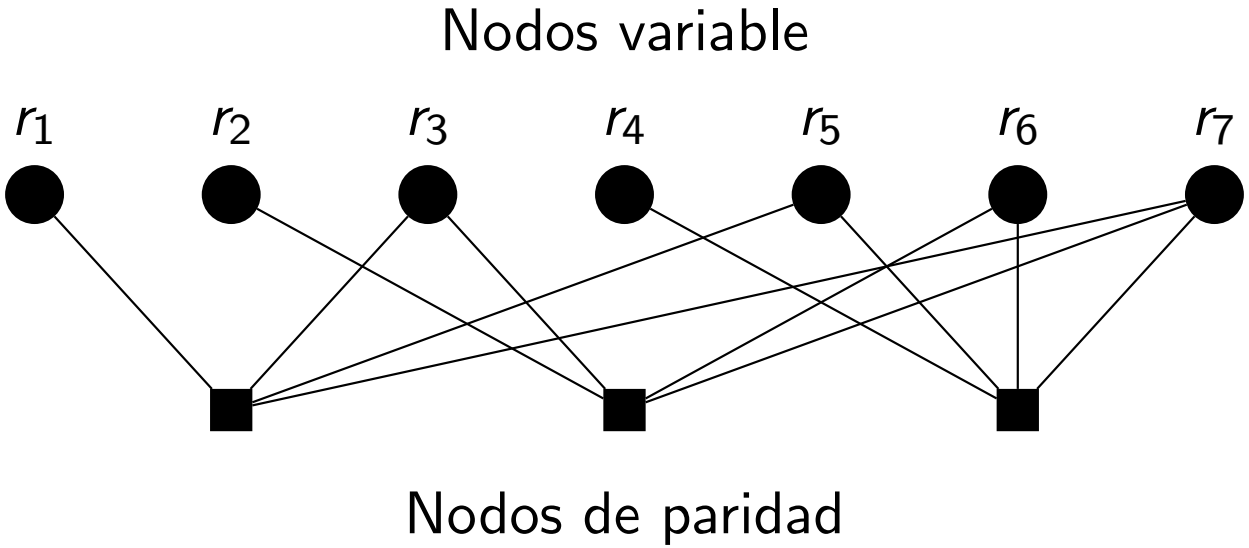
Moderna

- Decodificación **aproximada** con peor rendimiento pero mucha menor complejidad computacional ($O\left(n\right)$ operaciones).
- Se consigue operar **cerca de la capacidad** con probabilidad de error arbitrariamente pequeña utilizando **códigos muy largos!** (n grande)
- Examplos: Códigos turbo, LDPC, polares.

Grafo de Tanner

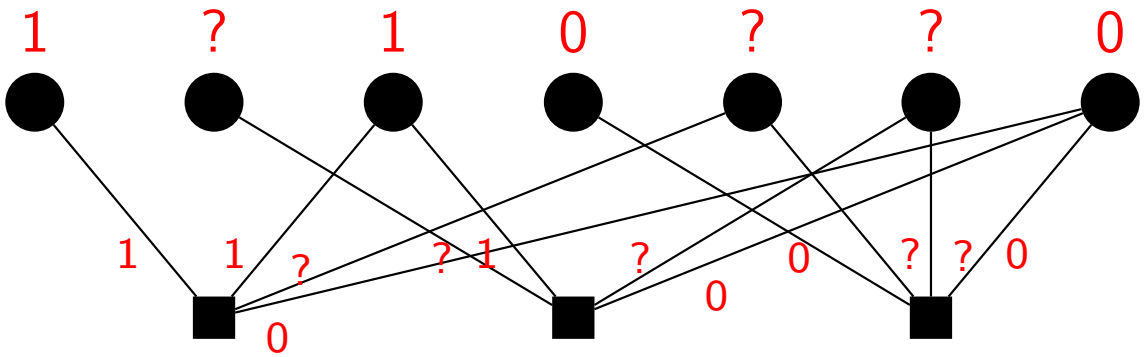
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Las restricciones dadas por esta matriz se pueden representar utilizando un **grafo de Tanner**



Algoritmo de propagación de creencias (belief propagation)

Inicialización: los nodos variable envian las obsevaciones del canal a los nodos de paridad a los que están conectados:

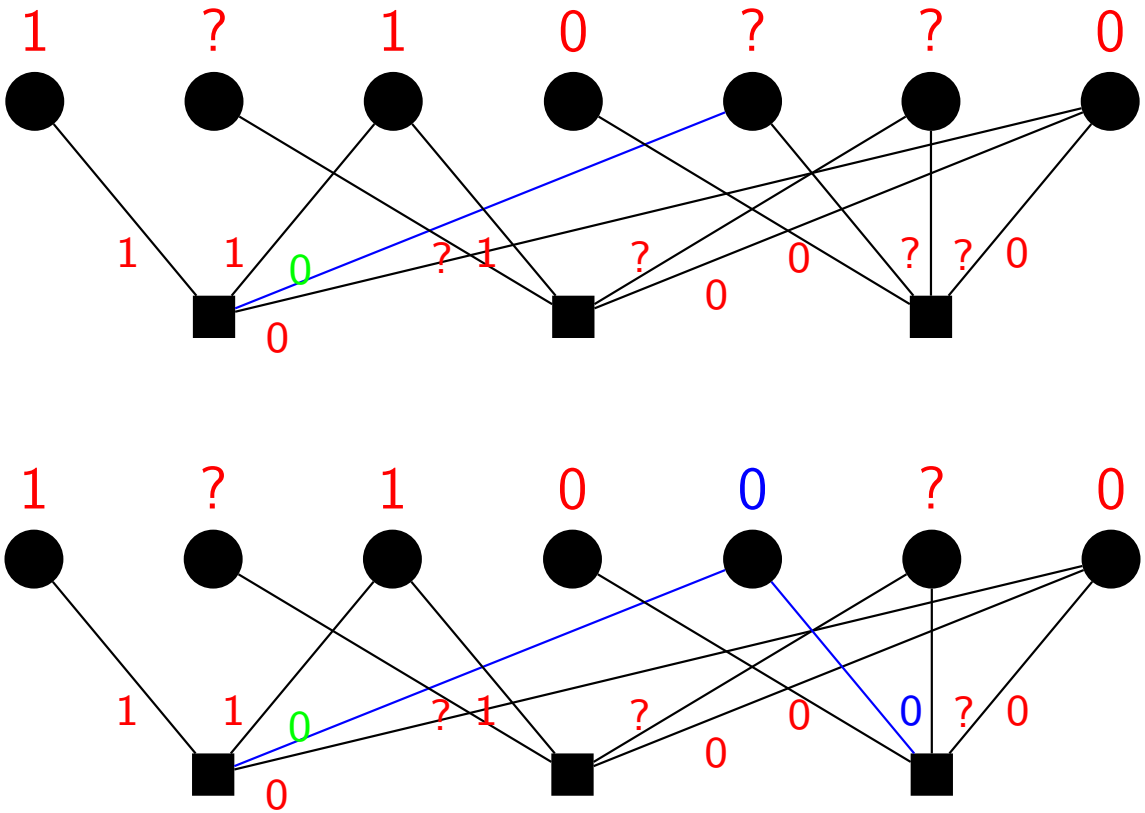


Mientras haya "?" no resueltos

1. Utilizando la información recibida, cada *nodo de paridad* intenta resolver el valor de la variable que ha enviado un mensaje "?". Si es posible, envían el valor obtenido a los nodos variable conectados. Si no, envían "?".
   - **Sólo los nodos de paridad con una única incógnita pueden hallar el valor de dicha variable!**
2. Los *nodos variable* envían el nuevo valor a los nodos de paridad...o reenvían el mensaje "?".

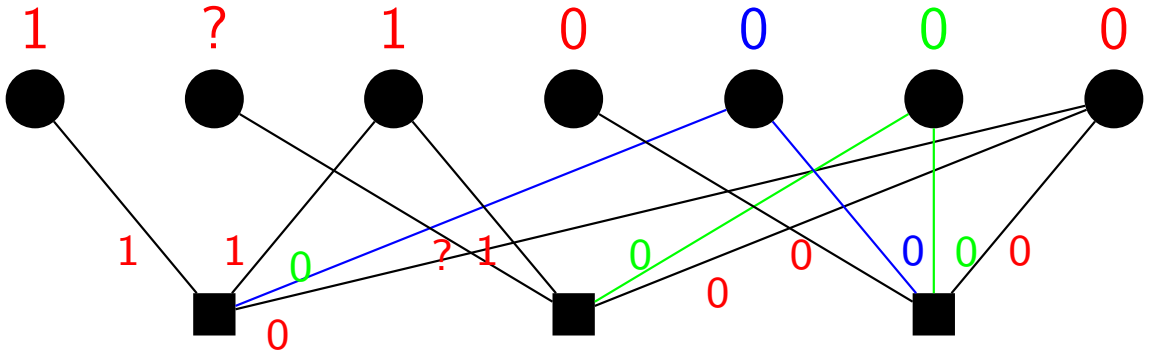
Algoritmo de propagación de creencias (belief propagation)

Primera iteración

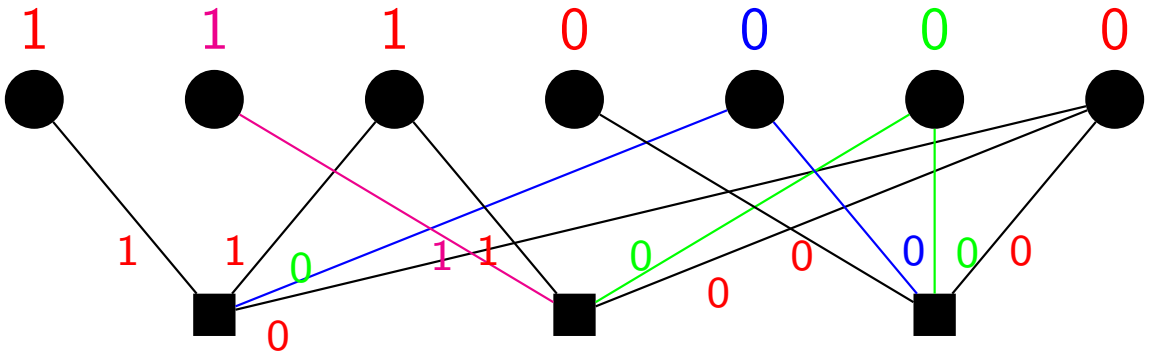


Algoritmo de propagación de creencias (belief propagation)

Segunda iteración



Tercera iteración



Algoritmo de propagación de creencias (belief propagation)

Algunas observaciones:

- En general, el rendimiento obtenido con el decodificador subóptimo es bastante malo (muchos errores de decodificación).
- Dada una matrix de control de paridad, **H**, de dimensiones $(n-k) \times n$, el número de unos por fila puede llegar a ser n.
- Si una fila tiene αn unos, entonces la probabilidad de que se reciban correctamente $\alpha n - 1$ variables y se borre **exactamente una** es

$$\alpha n \epsilon (1-\epsilon)^{(\alpha n - 1)}$$

que tiende a 0 ($\Rightarrow$ error de decodificación) cuando $\mathtt{n} \to \infty$.

($\alpha \in (0,1) \equiv$ proporción de 1s por bit)

Índice

Códigos LDPC

Códigos LDPC: códigos bloque lineales definidos por una matriz de control de paridad dispersa (*sparse*)

$$\mathbf{H}_{(\mathtt{n}-k)\times\mathtt{n}}, \qquad \mathbf{c}\mathbf{H}^T = \mathbf{0} \ \ \forall \mathbf{c} \in \mathcal{C}$$

LDPC (3,6) con $\mathtt{n} = 20$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
4	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
5	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1
7	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
8	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
9	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
10	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0

La densidad de unos en $\mathbf{H}$ es $6/\mathtt{n}$ y la tasa del código $R = 0{,}5$.

Forzando una estructura en **H**

Si el número de unos por fila es siempre 6, e.g.,

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow c_5 + c_9 + c_{10} + c_{11} + c_{16} + c_{20} = 0$$

...entonces la probabilidad de que una fila en **H** de lugar a una ecuación con una única incógnita, e.g.,

$$c_5 + ? + c_{10} + c_{11} + c_{16} + c_{20} = 0$$

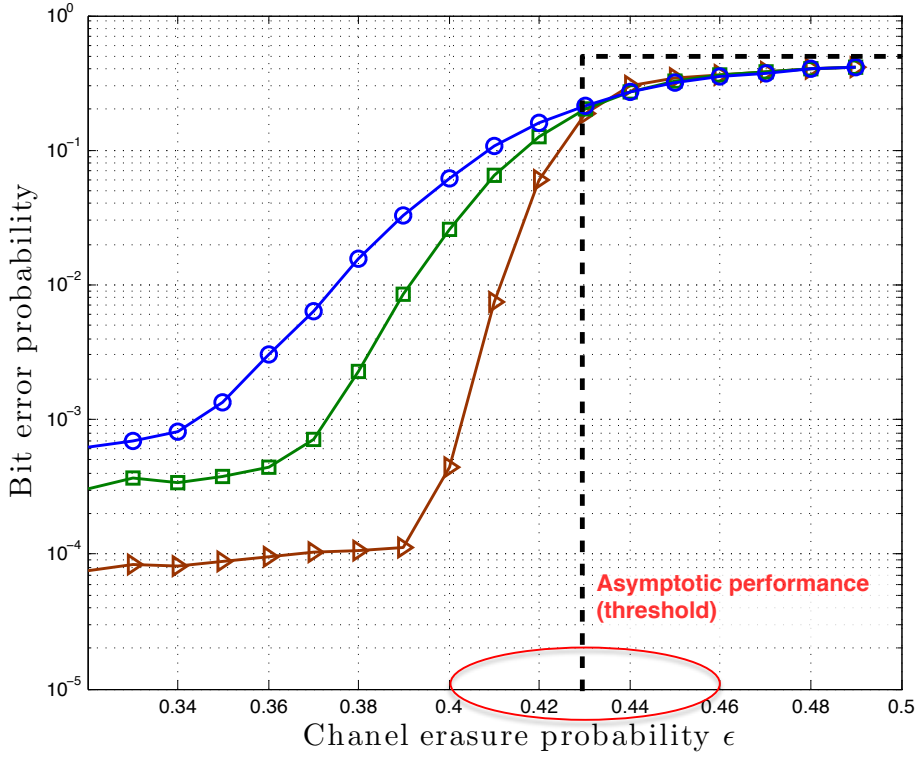
...es

$$6\epsilon(1-\epsilon)^5,$$

y **no depende** de n. Una ecuación con una sola incógnita se puede resolver...y una vez conocida dicha variable, hay una **probabilidad no nula de que aparezca otra ecuación en la que sólo hay una incógnita**. Esta probabilidad tampoco depende de n.

BER sobre BEC

Tasa de error de bit del código LDPC $(3, 6)$ sobre el BEC; $\mathtt{n} = 2^8$ $(\circ)$, $\mathtt{n} = 2^9$ $(\square)$, $\mathtt{n} = 2^{11}$ $(\triangleright)$.



Se puede calcular el umbral, ε^*, analíticamente. Únicamente depende del **patrón de conectividad en la matrix H!**.